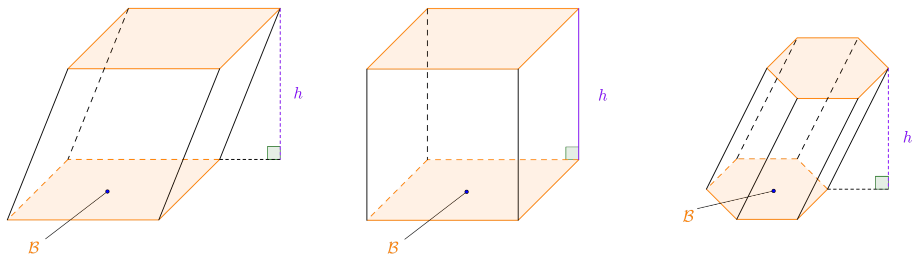
Volumes de solides.

I Les prismes.

Définition 1

Un *prisme* est un polyèdre constitué par deux bases polygonales superposables situées dans deux plans parallèles et par des parallélogrammes joignant les bases.

Exemples :



Remarque : en particulier, les parallélépipèdes rectangles, et donc les cubes, sont des prismes.

Proposition 1

Le volume d'un prisme est :

$$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur.

Exercice 1.

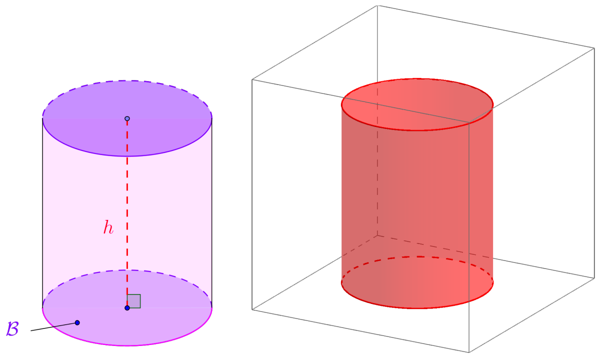
Calculez le volume des prismes de hauteur $h = 2$ et dont la base est :

1. un trapèze $ABCD$; les bases $[AB]$ et $[CD]$ mesurant respectivement 2 et 3 et la l hauteur du trapèze mesurant 4.
2. un carré $ABCD$ de côté 3.
3. un rectangle $ABCD$ dont les côtés vérifient $AB = 3$ et $BC = 4$.
4. un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2$ et $AC = 3$.

II Les solides de révolution.

Un *solide de révolution* est engendré par une surface plane fermée qui tourne autour d'un axe situé dans le même plan.

Les cylindres de révolution.



Proposition 2

Le volume d'un cylindre de révolution est :

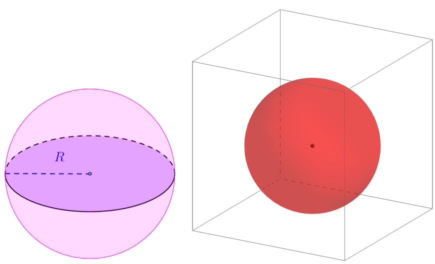
$$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$$

où : $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur.

Exercice 2.

Un cylindre de révolution de hauteur $h = 4$ dont la base est un disque de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 2$. Calculez le volume de ce cylindre sous la forme $a \times \pi$ avec a un élément de $\mathbb{N}$.

Sphère.



Proposition 3

Le volume d'une sphère est :

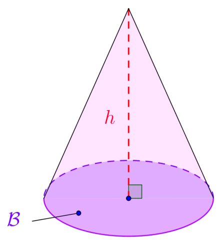
$$\mathcal{V} = \frac{4 \times \pi \times R^3}{3}$$

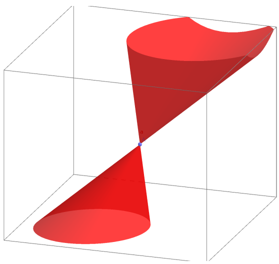
où : R est le rayon de la sphère.

Exercice 3.

Une sphère de centre O a un diamètre $[AB]$ tel que $AB = 2$. Calculez le volume intérieur à cette sphère sous la forme $q \times \pi$ avec q un élément de $\mathbb{Q}$.

Cône de révolution.





Proposition 4

Le volume d'un cône de révolution est :

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$$

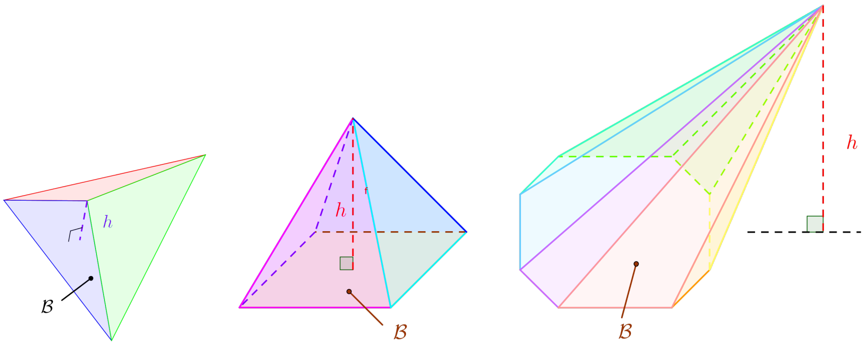
où : $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur.

Exercice 4.

Un cône de révolution de hauteur $h = 5$ a pour base un disque de rayon $[OA]$ tel que $OA = 2$. Calculez le volume de ce cône sous la forme $q \times \pi$ avec q un élément de $\mathbb{Q}$.

III Les pyramides.

Une *pyramide* est un polyèdre formé en reliant une base polygonale à un point (le sommet) par des faces triangulaires. Une pyramide est un solide conique à base triangulaire ; son volume se trouve avec la même formule que les cônes de révolution.



Tétraèdre. Pyramide (au sens usuel). Pyramide à base octogonale.

Proposition 5

Le volume d'une pyramide est :

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$$

où : $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur.

Exercice 5.

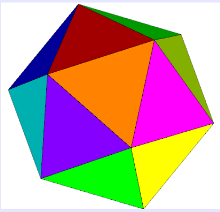
Calculez le volume d'un pyramide dont la hauteur est $h = 4$ et dont la base est :

1. un triangle rectangle ABC rectangle en A dont les côtés de l'angle droit mesurent $AB = 3$ et $AC = 4$.
2. un carré $MNPQ$ de côté mesurant 2.

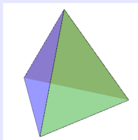
IV Exercices.

Exercice 6.

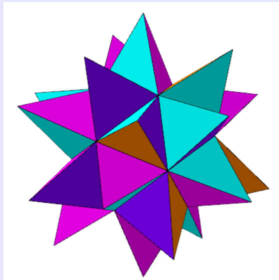
Pour faire une animation lors du Sidaction on construit un ballon de baudruche géant de la façon suivante : sur chacune des faces d'un icosaèdre (l'un des solides de Platon), d'arête $a = 2$ m, est collé une pyramide (de base évidemment triangulaire) et de hauteur $h = 2$ m.
On obtient ainsi :



$+$



$=$



Afin de savoir quelle bonbonne d'air comprimé acheter pour gonfler ce ballon déterminez le volume du ballon au dixième de mètre cube près par excès.

Indications :

1. Un icosaèdre comporte 20 faces qui sont toutes des triangles équilatéraux de longueur de côté a.
2. L'aire d'un triangle équilatéral de longueur de côté a est :

$$\mathcal{A} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

3. Le volume d'un icosaèdre dont l'arête a pour longueur a est :

$$\mathcal{V} = \frac{5}{6} \times \varphi^2 \times a^3$$

où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est *le nombre d'or*.

Exercice 7.

La *relation d'Euler* combine le nombre de faces (f), d'arêtes (a) et de sommets (s) d'un polyèdre

$$f - a + s$$

La valeur trouvée avec cette formule est appelée la caractéristique d'Euler ou d'Euler-Poincaré.

Euler

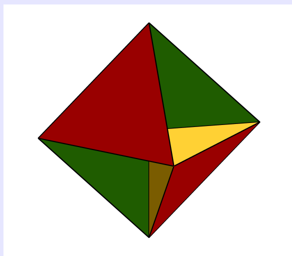
1. Calculez la caractéristique d'Euler-Poincaré pour un tétraèdre, un cube, un prisme à base rectangulaire, une pyramide (à base rectangulaire). Que remarquez vous ?

Ce résultat fut démontré par Cauchy alors âgé de 20 ans. Pour voir une illustration graphique de la démonstration téléchargez le fichier geogebra ou regardez l'animation.
Poincaré démontra ce résultat en le généralisant à des espaces de plus de 3 dimensions.

Cauchy

2. Calculez la caractéristique d'Euler-Poincaré du solide ci-contre qui porte le doux nom de tétrahémihexaèdre ou heptaèdre de Reinhardt.

   Fichiers geogebra 3D, 2D et animation.



Exercice 8.

Déterminez sans justification les valeurs approchées à 10^{-2} près par défaut des volumes des solides décrits.

1. Prisme de hauteur $h = 12$ cm et dont la base est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 5 cm et 4 cm.
2. Un cylindre de révolution de hauteur $h = 3$ cm dont le rayon de la base mesure 5 cm.
3. Une sphère dont le rayon mesure 3 cm.
4. Un cône de révolution dont la hauteur mesure 200 cm et le rayon de sa base 2 cm.
5. Une pyramide dont la base est un rectangle $RSTU$ tel que $RS = 12$ et $UR = 37$ et dont la hauteur a pour longueur $h = 13$.

Exercice 9.

Le rayon d'une bille de roulement à bille de hand-spinner est de 0,3 cm. Calculez le volume d'une telle bille.
Vous donnerez en cm^3, une valeur exacte ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut en écriture décimale puis scientifique.

Exercice 10.

Calculez une valeur exacte puis approchée à 10^{-2} près par défaut de chacun des volumes des solides décrits.

1. Un cylindre de révolution de hauteur $h = 10$ cm dont le rayon de la base mesure 3 cm.
2. Une sphère dont le rayon mesure 5 cm.
3. Une pyramide dont la base est un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 12$ et $BC = 37$ et dont la hauteur a pour longueur $h = 13$.