

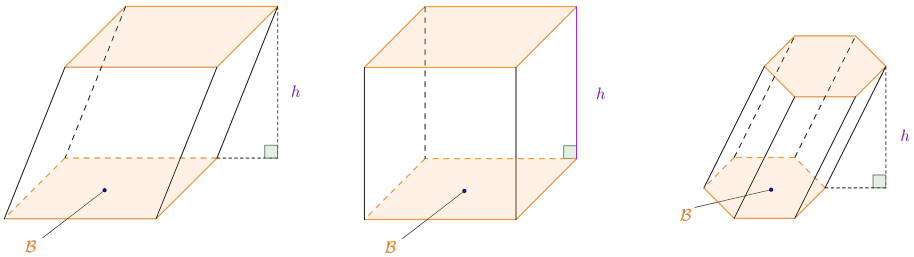
Volumés de solides.

I Les prismes.

Définition 1

Un *prisme* est un polyèdre constitué par deux bases polygonales superposables situées dans deux plans parallèles et par des parallélogrammes joignant les bases.

Exemples :



Remarque : en particulier, les parallélépipèdes rectangles, et donc les cubes, sont des prismes.

Proposition 1

Le volume d'un prisme est :

$$V = B \times h$$

où B est l'aire de la base et h la hauteur.

Exercice 1.

Calculez le volume des prismes de hauteur $h = 2$ et dont la base est :

1. un trapèze $ABCD$; les bases $[AB]$ et $[CD]$ mesurant respectivement 2 et 3 et la l hauteur du trapèze mesurant 4.
2. un carré $ABCD$ de côté 3.
3. un rectangle $ABCD$ dont les côtés vérifient $AB = 3$ et $BC = 4$.
4. un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2$ et $AC = 3$.

Correction exercice 1

1. Calculons le volume \mathcal{V}_1 du prisme.

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{B} \times h$$

Or

$$\mathcal{B} = \frac{AB + CD}{2} \times l$$

donc

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \frac{AB + CD}{2} \times l \times h \\ &= \frac{2 + 3}{2} \times 4 \times 2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

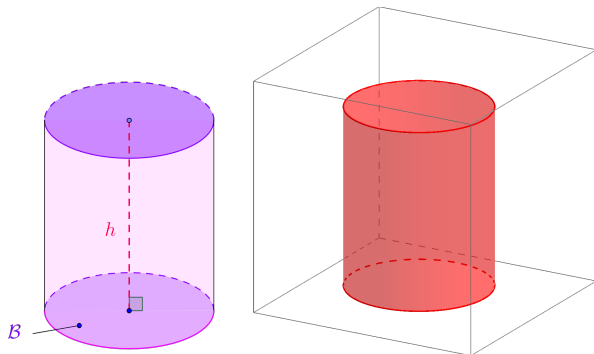
$$\mathcal{V}_1 = 20 \text{ (unités de volumes).}$$

2. De même : $\mathcal{V}_2 =$

II Les solides de révolution.

Un *solide de révolution* est engendré par une surface plane fermée qui tourne autour d'un axe situé dans le même plan.

Les cylindres de révolution.



Proposition 2

Le volume d'un cylindre de révolution est :

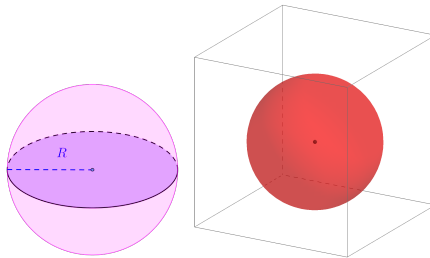
$$V = \mathcal{B} \times h$$

où : \mathcal{B} est l'aire de la base et h la hauteur.

Exercice 2.

Un cylindre de révolution de hauteur $h = 4$ dont la base est un disque de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 2$. Calculez le volume de ce cylindre sous la forme $a \times \pi$ avec a un élément de \mathbb{N} .

Sphère.



Proposition 3

Le volume d'une sphère est :

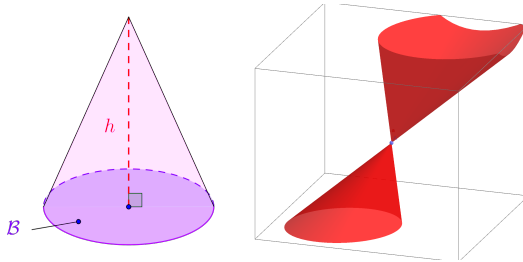
$$V = \frac{4 \times \pi \times R^3}{3}$$

où : R est le rayon de la sphère.

Exercice 3.

Une sphère de centre O a un diamètre $[AB]$ tel que $AB = 2$. Calculez le volume intérieur à cette sphère sous la forme $q \times \pi$ avec q un élément de \mathbb{Q} .

Cône de révolution.



Proposition 4

Le volume d'un cône de révolution est :

$$V = \frac{B \times h}{3}$$

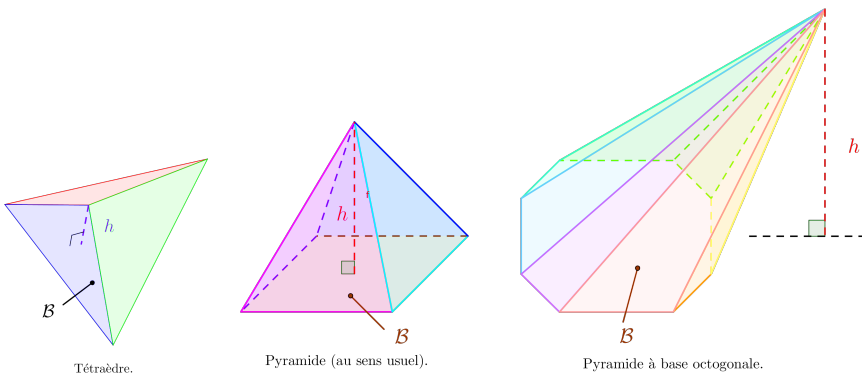
où : B est l'aire de la base et h la hauteur.

Exercice 4.

Un cône de révolution de hauteur $h = 5$ a pour base un disque de rayon $[OA]$ tel que $OA = 2$. Calculez le volume de ce cône sous la forme $q \times \pi$ avec q un élément de \mathbb{Q} .

III Les pyramides.

Une *pyramide* est un polyèdre formé en reliant une base polygonale à un point (le sommet) par des faces triangulaires. Une pyramide est un solide conique à base triangulaire ; son volume se trouve avec la même formule que les cônes de révolution.



Proposition 5

Le volume d'une pyramide est :

$$V = \frac{B \times h}{3}$$

où : B est l'aire de la base et h la hauteur.

Exercice 5.

Calculez le volume d'une pyramide dont la hauteur est $h = 4$ et dont la base est :

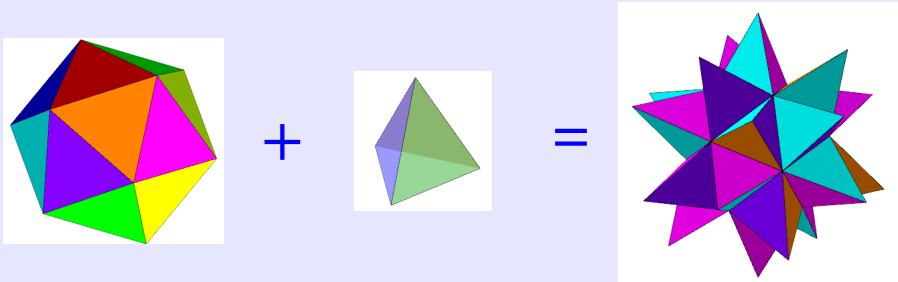
1. un triangle rectangle ABC rectangle en A dont les côtés de l'angle droit mesurent $AB = 3$ et $AC = 4$.
2. un carré $MNPQ$ de côté mesurant 2.

IV Exercices.

Exercice 6.

Pour faire une animation lors du Sidaction on construit un ballon de baudruche géant de la façon suivante : sur chacune des faces d'un **icosaèdre** (l'un des **solides de Platon**), d'arête $a = 2$ m, est collé une pyramide (de base évidemment triangulaire) et de hauteur $h = 2$ m.

On obtient ainsi :



Afin de savoir quelle bonbonne d'air comprimé acheter pour gonfler ce ballon déterminez le volume du ballon au dixième de mètre cube près par excès.

Indications :

1. Un icosaèdre comporte 20 faces qui sont toutes des triangles équilatéraux de longueur de côté a .
2. L'aire d'un triangle équilatéral de longueur de côté a est :

$$\mathcal{A} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

3. Le volume d'un icosaèdre dont l'arête a pour longueur a est :

$$\mathcal{V} = \frac{5}{6} \times \varphi^2 \times a^3$$

où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est *le nombre d'or*.

Exercice 7. Recherche.

La *relation d'Euler* combine le nombre de faces (f), d'arêtes (a) et de sommets (s) d'un polyèdre

$$f - a + s$$

La valeur trouvée avec cette formule est appelée la caractéristique d'Euler ou d'Euler-Poincaré.



Euler

1. Calculez la caractéristique d'Euler-Poincaré pour un tétraèdre, un cube, un prisme à base rectangulaire, une pyramide (à base rectangulaire). Que remarquez vous ?

Ce résultat fut démontré par Cauchy alors âgé de 20 ans. Pour voir une illustration graphique de la démonstration [téléchargez le fichier geogebra](#) ou regardez l'[animation](#).

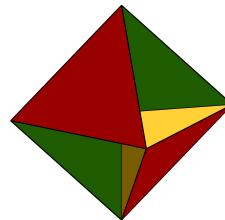
Poincaré démontra ce résultat en le généralisant à des espaces de plus de 3 dimensions.



Cauchy

- 2.

Calculez la caractéristique d'Euler-Poincaré du solide ci-contre qui porte le doux nom de tétrahémihexaèdre ou heptaèdre de Reinhardt.



Fichiers geogebra [3D](#), [2D](#) et [animation](#).

Exercice 8.

Déterminez sans justification les valeurs approchées à 10^{-2} près par défaut des volumes des solides décrits.

1. Prisme de hauteur $h = 12$ cm et dont la base est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 5 cm et 4 cm.
2. Un cylindre de révolution de hauteur $h = 3$ cm dont le rayon de la base mesure 5 cm.
3. Une sphère dont le rayon mesure 3 cm.
4. Un cône de révolution dont la hauteur mesure 200 cm et le rayon de sa base 2 cm.
5. Une pyramide dont la base est un rectangle $RSTU$ tel que $RS = 12$ et $UR = 37$ et dont la hauteur a pour longueur $h = 13$.

Exercice 9.

Le rayon d'une bille de roulement à bille de hand-spinner est de 0,3 cm. Calculez le volume d'une telle bille.

Vous donnerez en cm^3 , une valeur exacte ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut en écriture décimale puis scientifique.

Exercice 10.

Calculez une valeur exacte puis approchée à 10^{-2} près par défaut de chacun des volumes des solides décrits.

1. Un cylindre de révolution de hauteur $h = 10$ cm dont le rayon de la base mesure 3 cm.
2. Une sphère dont le rayon mesure 5 cm.
3. Une pyramide dont la base est un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 12$ et $BC = 37$ et dont la hauteur a pour longueur $h = 13$.