

## Proportions.

La notion de proportionnalité vous est familière. Au collège vous avez eu l'occasion de parler de :

- tableau de proportionnalité,
- quatrième proportionnelle,
- la notion et la notation du ratio (des explications et des exercices),
- de la modélisation d'une situation de proportionnalité par une fonction affine,
- le lien entre proportionnalité et géométrie dans le cadre du théorème de Thalès et nous aurons aussi l'occasion de l'utiliser pour la loi des sinus.

Nous allons cette année revoir cette notion dans le cas particulier de l'étude statistiques de populations.

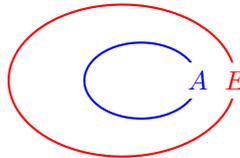
Dans cette leçon, si  $A$  est un ensemble d'objets, nous noterons  $|A|$  son *cardinal*, *i.e.* le nombre d'objets qu'il y a dans l'ensemble  $A$ .

### I Calculer une proportion.

#### Définition 1

Soient :

- .  $E$  un ensemble fini,
- .  $A \subset E$  un sous-ensemble de  $E$ .



Nous appellerons *proportion de A dans E* le nombre rationnel

$$p_E(A) = \frac{|A|}{|E|}.$$

Exemples.

1. Dans une classe de 24 élèves il y a 2 filles. La proportion de filles dans la classe est de  $p = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ .

Remarques.

1. Dans ce cas une proportion peut aussi être appelée une fréquence et l'on retrouve la formule habituelle :  $\frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$ .
2. Une proportion est un nombre rationnel appartenant à l'intervalle  $[0,1]$ .

3. La notion de proportionnalité se généralise bien sûr comme vous le savez.
4. En statistique  $E$  est appelée la population de référence et  $A$  une sous-population de  $E$ .
5. Dans le langage courant (histoire, SES, etc) les proportions sont exprimées en pourcentages, c'est-à-dire en centièmes.

Exercice 1. ♥

Dans une classe de première de 35 élèves, 9 élèves font du ski.

Calculez la proportion, notée  $p$ , d'élèves de la classe qui font du ski. Écrivez  $p$  sous la forme d'une fraction, puis donnez sa valeur arrondie à  $10^{-4}$  près et enfin le taux (en pourcentage)  $t$  correspondant.

Correction exercice 1

Notons  $E$  l'ensemble des élèves de la classe et  $A$  l'ensemble de ceux qui font du ski.

Calculons  $p_E(A)$ .

Par définition

$$p_E(A) = \frac{|A|}{|E|}.$$

Or  $|A| = 9$  et  $|E| = 35$  donc :

$$p_E(A) = \frac{9}{35}.$$

$$p_E(A) \approx 0,2571 \text{ en arrondissant à } 10^{-4} \text{ près.}$$

Exprimer ce résultat en pourcentage revient à l'exprimer en centièmes. Il suffit donc de multiplier la précédente valeur par 100.

$$p_E(A) \approx 25,71 \text{ \%}.$$

Exercice 2. Application.

Une salle de spectacle contient 9 000 places assises et 21 000 places debout.

1. Calculez la proportion de places assises.
2. Déterminez la proportion de places debout.

Correction exercice 2

- Calculons la proportion,  $p_E(A)$ , de places assises.

Notons  $A$  l'ensemble des places assises et  $E$  l'ensemble de toutes les places.

Nous avons  $|A| = 9000$  (le nombre de places assises) et  $|E| = 9000 + 21000 = 30000$  (le nombre total, assis ou debout, de places).

Donc la proportion de places assises est :

$$\begin{aligned} p_E(A) &= \frac{|A|}{|E|} \\ &= \frac{9000}{30000} \end{aligned}$$

$$p_E(A) = 0,3.$$

- Calculons la proportion,  $p_E(B)$ , de places debout.

Notons  $B$  l'ensemble des places debout.

Nous avons  $|B| = 21000$ .

La proportion de places debout est :

$$\begin{aligned} p_E(B) &= \frac{|B|}{|E|} \\ &= \frac{21000}{30000} \end{aligned}$$

$$p_E(B) = 0,7.$$

## II Calculer avec une proportion.

Pour résoudre les exercices qui suivent vous devrez jongler avec la formule  $p = \frac{|A|}{|E|}$  et parfois raisonner en utilisant les diagrammes de Venn (diagrammes patates).

### Exercice 3. Application.

- Dans un petit port, les cinq-sixièmes des 720 habitants vivent de la pêche. Combien d'habitants vivent de la pêche ?
- Dans un village voisin, 697 habitants vivent de l'agriculture, ce qui représente 82% de la population. Combien y a-t-il d'habitants dans ce village ?

### Correction exercice 3

1. Notons  $A$  l'ensemble des habitants vivant de la pêche et  $E$  celui des habitant du village.

Calculons  $|A|$ .

$$p_E(A) = \frac{|A|}{|E|}$$

équiva ut successivement à :

$$p_E(A) \times |E| = \frac{|A|}{|E|} \times |E|$$

$$p_E(A) \cdot |E| = |A|$$

$$720 \times \frac{5}{6} = |A|$$

$$|A| = 600.$$

2. Notons  $A$  l'ensemble des habitants vivant de l'agriculture et  $E$  celui des habitant du village.

Calculons  $|E|$ .

$$p_E(A) = \frac{|A|}{|E|}$$

équiva ut successivement à :

$$p_E(A) \times |E| = \frac{|A|}{|E|} \times |E|$$

$$p_E(A) \cdot |E| = |A|$$

$$\frac{p_E(A) \cdot |E|}{p_E(A)} = \frac{|A|}{p_E(A)}, \text{ car } p_E(A) > 0$$

$$|E| = \frac{|A|}{p_E(A)}$$

$$= \frac{697}{\frac{82}{100}}$$

$$|E| = 850.$$

## Exercice 4. Application.

1. Une année le taux de réussite au baccalauréat technologique est de 79,7 %, ce qui représente 129 979 candidats reçus.  
Calculez le nombre de candidats à cet examen.
2. Dans un lycée le taux de réussite est de 95 %, et il y a eu 12 refusés.  
Calculez le nombre de candidats dans ce lycée.

Correction exercice 4

1. Notons :  $A$  l'ensemble des candidats reçus et  $E$  celui de tous le candidats.

Calculons  $|E|$ .

$$p_E(A) = \frac{|A|}{|E|}$$

équivalut successivement à :

$$0,797 = \frac{129979}{|E|}$$

$$0,797|E| = 129979$$

$$|E| = \frac{129979}{0,797}$$

$$|E| \approx 163085.$$

2. Notons :  $A$  l'ensemble des lycéens recalés et  $E$  celui des candidats à l'examen.  
Calculons  $|E|$ .

$$p_E(A) = \frac{|A|}{|E|}$$

équivalut successivement à :

$$0,05 = \frac{12}{|E|}, \quad \text{car } 1 - \frac{95}{100} = 0,05$$

$$0,05 \times |E| = 12$$

$$|E| = \frac{12}{0,05}$$

$$|E| \approx 240.$$

## Exercice 5. Application.

Le salaire brut mensuel de Sophie est de 13 200 €. Les cotisations salariales représentent 23 % du salaire brut.

Calculez le salaire hors cotisations salariales.

Correction exercice 5

Notons :  $|A|$  le salaire hors cotisation salariale,  $p_E(A) = \frac{100-23}{100}$  et  $|E| = 13200$  le salaire brut.

Déterminons  $|A|$ .

$$p_E(A) = \frac{|A|}{|E|}$$

équivalent successivement à :

$$\begin{aligned} 0,77 &= \frac{|A|}{13200} \\ 0,77 \times 13200 &= |A| \\ 10164 &= |A| \end{aligned}$$

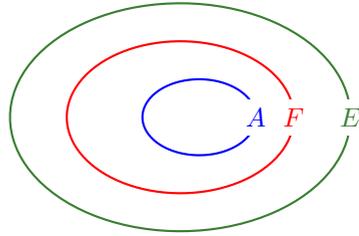
Le salaire hors cotisation salariales est de 10 164 €.

**III Pourcentage de pourcentage.**

## Proposition 1

Soient :

- .  $E$  un ensemble fini,
- .  $F \subset E$  un sous-ensemble de  $E$ ,
- .  $A \subset F$  un sous-ensemble de  $F$ .



$$p_E(A) = p_E(F) \times p_F(A).$$

### Démonstration 1

Par définition :  $p_E(F) = \frac{|F|}{|E|}$  et  $p_F(A) = \frac{|A|}{|F|}$ .

Donc :

$$\begin{aligned} p_E(F) \times p_F(A) &= \frac{|F|}{|E|} \times \frac{|A|}{|F|} \\ &= \frac{|F| \times |A|}{|E| \times |F|} \\ &= \frac{|A|}{|E|} \\ &= p_E(A) \end{aligned}$$

Remarques.

1. Cette proposition permet en particulier de calculer un pourcentage de pourcentage. 60 % de 20 % représente donc  $\frac{60}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{12}{100}$  autrement dit 12 %.
2. Les proportions fonctionnent de façon multiplicative. Vous retrouverez cette idée en classe de première en parlant de *principe multiplicatif*.

### Exercice 6. ♥

Un serveur de films en streaming est composé de 30 % de films d'action et, parmi ces films d'action, 60 % sont des films avec Bruce Willis.

Quelle est la proportion de films avec Bruce Willis sur le serveur ?

### Correction exercice 6

Notons  $E$  l'ensemble des films proposés,  $F$  l'ensemble des films d'actions et  $A$  l'ensemble des films avec Bruce Willis.

Nous avons bien la situation des inclusions successives :  $A \subset F \subset E$ .

Calculons  $p_E(A)$ .

Nous savons que  $p_E(F) = 0,3$  et  $p_F(A) = 0,6$  donc

$$\begin{aligned} p_E(A) &= p_E(F) \times p_F(A) \\ &= 0,3 \times 0,6 \end{aligned}$$

$$p_E(A) = 0,18.$$

### Exercice 7. Application.

Dans une classe 45 % des élèves sont des garçons et un tiers des garçons portent des lunettes.

Il y a 3 garçons à lunettes dans la classe.

1. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?
2. Combien y a-t-il de filles dans cette classe ?

### Correction exercice 7

Notons  $E$  l'ensemble des élèves,  $F$  l'ensemble des garçons et  $A$  l'ensemble des garçons à lunettes.

1. Calculons  $n_E$ .

D'après l'énoncé  $p_F(A) = \frac{1}{3}$  et  $p_E(F) = \frac{45}{100}$  donc la proportion de garçons à lunettes dans la classe est

$$\begin{aligned} p_E(A) &= p_E(F) \times p_F(A) \\ &= \frac{45}{100} \cdot \frac{1}{3} \\ &= 0,15 \end{aligned}$$

Mais on peut aussi écrire que :

$$p_E(A) = \frac{|A|}{|E|}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 0,15 &= \frac{3}{|E|} \\ 0,15 \times |E| &= \frac{3}{|E|} \times |E| \\ 0,15 \times |E| &= 3 \\ \frac{0,15|E|}{0,15} &= \frac{3}{0,15} \\ |E| &= 20 \end{aligned}$$

Il y a vingt élèves dans la classe.

2. Notons  $G$  l'ensemble ds filles de la classe.

Calculons le nombre,  $|G|$ , de filles dans la classe.

Il s'agit simplement de calculer un pourcentage d'une quantité.

Le nombre de garçons dans la classe est :

$$\begin{aligned} |F| &= p_E(F) \times |E| \\ &= \frac{45}{100} \times 20 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Donc :  $|G| = 20 - 9$ .

Il y a 11 filles dans la classe.

### Exercice 8. Application.

Dans un société les cadres représentent 40 % des salariés et les cadres supérieurs représentent un cinquième des cadres.

Quelle est la proportion de cadres supérieurs par rapport aux salariés de cette société ?

#### Correction exercice 8

Notons  $E$  l'ensemble des salariés,  $F$  l'ensemble des cadres et  $A$  l'ensemble des cadres supérieurs.

Nous avons bien la situation des inclusions successives :  $A \subset F \subset E$ .

Calculons  $p_E(A)$ .

Nous savons que  $p_E(F) = 0,4$  et  $p_F(A) = \frac{1}{5}$  donc

$$\begin{aligned} p_E(A) &= p_E(F) \times p_F(A) \\ &= 0,4 \times \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$p_E(A) = 0,08.$$

## Exercice 9. Application.

Une société de téléphonie propose trois mode d'abonnement différents :

- forfait  $A$  : moins de 2 h de communication ;
- forfait  $B$  : moins de 4 h de communication ;
- forfait  $C$  : temps de communication illimité.

La part de clients ayant souscrit le forfait  $A$  est de 0,35 et les clients ayant choisi le forfait  $B$  représentent la moitié de la clientèle.

De plus 80 % des clients ayant choisi le forfait  $C$  ont également choisi l'internet illimité.

1. Quelle est la part de clients ayant choisi le forfait illimité? Exprimez ce résultat en pourcentage.
2. Quelle est la part des clients qui ont choisi un forfait  $C$  mais sans l'internet illimité.

Correction exercice 9

1. Notons  $E$  l'ensemble de tous les clients.

Calculons  $p_E(C)$ .

Nous savons que

$$p_E(A) + p_E(B) + p_E(C) = 1. \quad (1)$$

En exprimant les proportions en pourcentages nous aurions que le total doit être de 100 % =  $\frac{100}{100} = 1$ .

(1) est successivement équivalente à

$$\begin{aligned} 0,35 + \frac{1}{2} + p_E(C) &= 1 \\ 0,85 + p_E(C) &= 1 \\ 0,85 + p_E(C) - 0,85 &= 1 - 0,85 \\ p_E(C) &= 0,15 \end{aligned}$$

Finalement

15 % des clients ont choisi le forfait  $C$ .

2. Notons  $D$  l'ensemble des clients ayant choisi le forfait  $C$  mais qui n'ont pas choisi l'internet illimité.

Calculons  $p_E(D)$ .

Nous identifions la situation de populations emboîtées :  $D \subset C \subset E$ . Donc, d'après la leçon :

$$\begin{aligned}
 p_E(D) &= p_E(C) \times p_C(D) \\
 &= 0,15 \times \left( \frac{100}{100} - \frac{80}{100} \right) \\
 &= 0,03
 \end{aligned}$$

3 % des clients ont un forfait  $C$  sans internet illimité.

### Exercice 10. Concours.

Le tableau incomplet, en question 1.(b), donne le nombre de salariés en France, en milliers, selon la catégorie et le type de contrôle de l'entreprise en 2015.

*On peut traiter les questions 1. et 2. de façon indépendante.*

1. (a) En 2015, 66,8 % des salariés des ETI (entreprises de taille intermédiaire) font partie d'un groupe français.  
Calculer le nombre de salariés des ETI de groupes français.
  
- (b) Compléter le tableau donné ci-dessous en arrondissant les résultats au millier près.

	Unités légales hors groupes	Groupes français	Sous contrôle d'un groupe étranger	Total
Grandes entreprises (GE)	0			4 235
Entreprises de taille intermédiaire (ETI)	154			3 657
Petites et moyennes entreprises (PME) hors microentreprises	1 669	2 255	335	4 259
Microentreprises (MIC)	2 549	177	20	2 745
Total	4 373	8 477	2 047	14 897

2. Nous noterons  $F$  l'ensemble des salariés faisant partie d'un groupe français,  $M$  l'ensemble des salariés faisant partie d'une PME et  $E$  l'ensemble de tous les salariés. Dans cette question, les probabilités demandées seront arrondies à  $10^{-2}$ .

- (a) Calculer la proportion,  $p_E(F)$ , de salariés d'un groupe français parmi les salariés et  $p_F(M)$  la proportion de salariés travaillant en PME parmi les salariés français.
- (b) Exprimer  $\frac{2255}{14897}$  en pourcentage et interpréter, dans le contexte de l'exercice, cette proportion.
- (c) Calculer  $p_M(F)$  et interpréter, dans le contexte de l'exercice, cette proportion.

Correction exercice 10

1. (a) Notons  $E_1$  l'ensemble des salariés des ETI et  $A_1$  l'ensemble des salariés des ETI appartenant à des groupes français.

Déterminons  $|A_1|$ .

$$\begin{aligned} |A_1| &= p_{E_1}(A_1) \times |E_1| \\ &= \frac{66,8}{100} \times 3657 \\ &= 2442,876 \end{aligned}$$

Les ETI comptent 2 442 876 salariés.

(b)

	Unités légales hors groupes	Groupes français	Sous contrôle d'un groupe étranger	Total
(GE)	0	3 602	632	4 235
(ETI)	154	2 443	1 060	3 657
(PME)	1 669	2 255	335	4 259
(MIC)	2 549	177	20	2 745
Total	4 373	8 477	2 047	14 897

2. (a)

#### **IV Ce qu'il faut retenir.**

- La formule liant population, sous-population et proportion.
- Savoir manipuler cette formule pour obtenir la donnée désirée.
- Raisonner sur un diagramme de Venn pour trouver les données nécessaire.
- Calculer un pourcentage de pourcentage.