Fonctions de référence.

I Fonction carrée.

Définition.

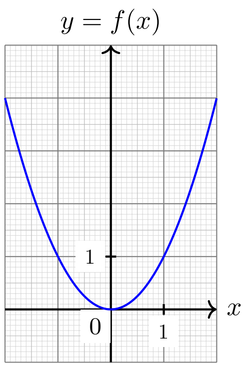
Soit x un nombre réel. Le *carré de x*, qu'on note x^2, est le nombre réel $x \times x$.

La fonction carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à chaque réel x associe son carré x^2. Autrement dit :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$

Courbe représentative.

Avec un logiciel on peut obtenir la courbe représentative de la fonction carrée qui est appelée une *parabole* (ici pour $x \in [-2\ ;\ 2]$).
Ce graphique permet de conjecturer un certain nombre d'éléments de la fonction carrée : un axe de symétrie, le signe (toujours positif), les variations,...



Signe.

Proposition 1

Tableau de signe de la fonction carrée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		+	0	+	

Démonstration 1

Montrons que la fonction carrée est positive (ou nulle).

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Le produit de deux nombres de même signe est un nombre positif donc : $x^2 = x \times x \geq 0$.

Recherchons les valeurs de x pour lesquelles x^2 égale 0.

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x \times x = 0$ est une équation produit. Donc $x^2 = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = 0$. Autrement dit $x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Variation.

Proposition 2

Tableau de variations de la fonction carrée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Démonstration 2

Montrons que la fonction carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres quelconques dans $[0\ ;\ +\infty[$ tels que : $x_1 < x_2$.
D'une part :

$$x_1^2 \leq x_2 \times x_1, \text{ car } x_1 \geq 0$$

et d'autre part :

$$x_1 x_2 < x_2^2, \text{ car } x_2 x_2 > x_1 \geq 0$$

On en déduit :

$$x_1^2 \leq x_1 x_2 < x_2^2$$

et donc $x_1^2 < x_2^2$.

Nous avons démontrés que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons que la fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres quelconques dans $]-\infty\ ;\ 0]$ tels que : $x_1 < x_2$.
D'une part :

$$x_1^2 > x_2 \times x_1, \text{ car } x_1 x_1 < x_2 \leq 0$$

et d'autre part :

$$x_1 x_2 \geq x_2^2, \text{ car } x_2 x_2 \leq 0$$

On en déduit :

$$x_2^2 \leq x_1 x_2 < x_1^2$$

et donc $x_2^2 < x_1^2$.

Nous avons démontrés que la fonction carrée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Remarques.

1. Autrement dit : la fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. La fonction carrée n'est pas une fonction affine.

   Démonstration 3
   Nous avions vu qu'une fonction est affine si et seulement si son taux d'accroissement est constant (quelles que soient les valeurs choisies pour x_1 et x_2.
   Nous allons démontrer que le taux d'accroissement n'est pas constant.

   Déterminons deux taux d'accroissements distincts pour la fonction carrée.

   Cas 1 : Si $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ alors le taux d'accroissement de la fonction carrée entre x_1 et x_2 est :
   $$\tau = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = 1$$

   Cas 2 : Si $x_1 = 0$ et $x_2 = -1$ alors le taux d'accroissement de la fonction carrée entre x_1 et x_2 est :
   $$\tau = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = -1$$

   Le taux d'accroissement n'est donc pas constant et la fonction carrée n'est pas une fonction affine.

Exercice 1

Dans chaque cas comparez les nombres A et B sans utiliser la calculatrice.

1. $A = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ et $B = \left(\frac{4}{3}\right)^2$,
2. $A = 1{,}001^2$ et $B = 1{,}0099^2$,
3. $A = -2{,}3^2$ et $B = (-2{,}3)^2$.

Exercice 2

Encadrez x^2, puis $3x^2$, le plus précisément possible, dans les cas suivants :

1. $1 \leq x \leq 4$,
2. $-2 \leq x < -0{,}5$,
3. $-2 \leq x < 3$,
4. $-10 \leq x \leq 10$.

Exercices.

Exercice 3

Recopiez et complétez sans justification les phrases suivantes.

1. Si $x \leq -7$, alors $x^2 \ldots$
2. Si $x \geq 5\sqrt{2}$, alors $x^2 \ldots$
3. Si $-7 \leq x \leq 5\sqrt{2}$, alors $\cdots \leq x^2 \leq \ldots$

Exercice 4 pour s'entraîner.

Prouvez que les propositions suivantes sont fausses.

1. Si $x \leq 1$, alors $x^2 \leq 1$.
2. Si $x > -\sqrt{10}$, alors $x^2 < 10$.

Exercice 5

Résolvez graphiquement les inéquations

$x^2 \leq 5$ $\qquad$ $x^2 > 5$ $\qquad$ x est négatif et $x^2 \leq 5$

II Fonction inverse.

Définition 1

La *fonction inverse* est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (tous les nombres sauf 0) par la formule

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Remarques.

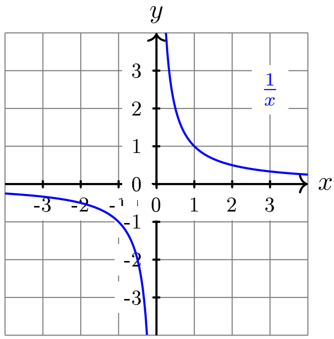
1. La courbe représentative de la fonction inverse est appelée une *hyperbole*.
2. L'hyperbole présente une symétrie centrale dont le centre est l'origine du repère.
3. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ peut aussi être noté $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ ou $\mathbb{R}^*$.

Tableau de signe.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	

Tableau de variation.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	



Exercice 6 pour s'entraîner.

1. Exercice 101 page 237 : encadrer avec la fonction inverse.

III Fonction racine carrée.

Définition 2

La *fonction racine carrée* est définie sur $[0; +\infty[$ (tous les nombres positifs) par la formule

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Remarques.

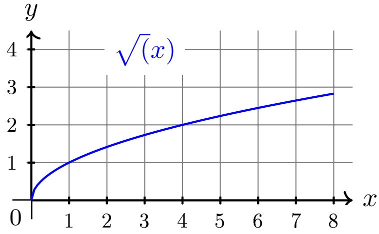
1. La courbe représentative de la fonction racine carrée est une branche de parabole.
2. L'ensemble $[0; +\infty[$ peut aussi être noté $\mathbb{R}_+$.

Tableau de signe.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$

Tableau de variation.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$



Exercice 7 pour s'entraîner.

1. Exercice 102 page 237 : encadrer une expression avec racine carrée.

IV Fonction cube.

Définition 3

La *fonction cube* est définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

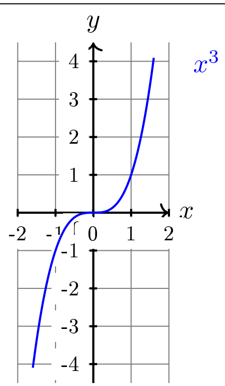
$$f(x) = x^3$$

Tableau de signe.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	

Tableau de variation.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3		$\nearrow$



Exercice 8 pour s'entraîner.

1. Exercice 102 page 237 : encadrer une expression avec racine carrée.

V Fonction valeur absolue.

Définition 4

Nous appellerons *valeur absolue d'un nombre* x, et nous noterons $|x|$, le nombre

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Remarques.

1. Autrement dit il faut prendre la « version positive » du nombre, par exemple $|-3| = 3$, $|5| = 5$, $|0| = 0$.

Définition 5

Nous appellerons *fonction valeur absolue* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe $|x|$.

Remarques.

1. Il est possible d'obtenir une unique formule de calcul pour exprimer la fonction valeur absolue : $|x| = \sqrt{x^2}$.

Exercice 9

Donnez les tableaux de signe et de variation sur son ensemble de définition ainsi que la courbe représentative sur $[-4; 4]$ de la fonction variation absolue.

VI Exercices.

Exercice 10

Associez, sans aucune justification, chaque fonction à sa courbe représentative.

$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $\quad f_2 : x \mapsto x$,

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$, $\quad f_4 : x \mapsto x^2$.