Fonctions affines.

I Des fonctions simples mais importantes.

Définition 1

Soit f une fonction numérique.

f est dit *affine* si et seulement si il existe des nombres a et b réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

Dans ce cas a est appelé *le coefficient directeur* (ou *pente*) et b est appelé *l'ordonnée à l'origine*.

Exemples.

1. La fonction $f : x \mapsto 2x + 3$, définie sur $\mathbb{R}$, est une fonction affine avec $a = 2$ et $b = 3$.
2. La fonction $g : x \mapsto -4x + 5$ définie sur $\mathbb{R}$, est une fonction affine avec $a = -4$ et $b = 5$.

Remarques.

1. Les fonctions linéaires et constantes sont des cas particuliers de fonctions affines. Si $a = 0$ la fonction affine est une *fonction constante*. Si $b = 0$ alors la fonction affine est une *fonction linéaire*.
2. *La courbe représentative d'une fonction affine est une droite*. Nous reviendrons sur cette question lorsque nous étudierons les droites et pour l'instant nous l'admettrons.
3. Une fonction affine est une fonction polynomiale de degré strictement plus petit que deux.
4. Le nom de b (ordonnée à l'origine) vient du fait que : $b = f(0)$.
5. Les fonctions affines sont des fonctions simples à étudier qui offrent de nombreuses applications comme étudier des fonctions plus complexes, étudier des droites (leçon ultérieure) ou encore résoudre des équations et des inéquations linéaires.

Exercice 1.

Tracez la courbe représentative de la fonction affine $f : x \mapsto -\frac{1}{3}x + 2$ sur $[-3; 6]$.

Correction exercice 1

Pour tracer la courbe représentative d'une fonction quelconque il faut utiliser le tableau de valeur de la calculatrice et tracer un grand nombre de points puis les relier en s'inspirant du tracer fournit par la calculatrice.

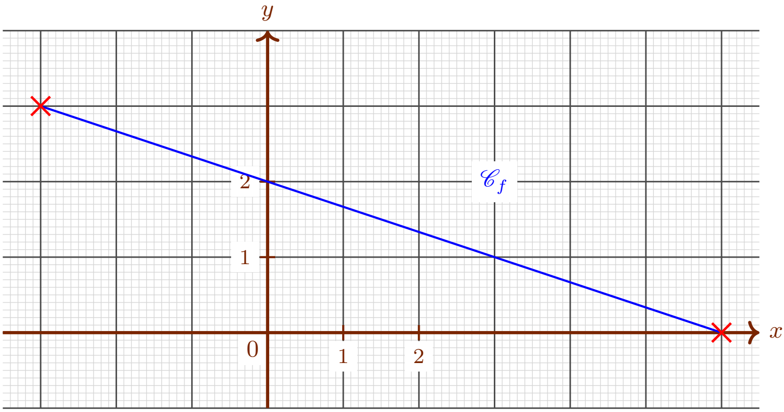
Cependant la courbe représentative d'une fonction affine est une droite (cf supra) donc il s'agit de tracer une droite. Il suffit de relier de façon rectiligne deux points distincts de cette droite.

Traçons la courbe représentative de f.

f est une fonction affine avec $a = -\frac{1}{3}$ et $b = 2$ donc sa courbe représentative et une droite.

On choisit deux valeurs distinctes de x ici, par exemple les bornes de l'ensemble de définition de f et on regarde leurs images par f.

$f(-3) = 3$ et $f(6) = 0$ (ce qui s'interprète en disant que $\mathscr{C}_f$ passe par les points de coordonnées $(-3;3)$ et $(6{,}0)$) donc :



II Étude du signe d'une fonction affine.

Nous souhaitons étudier le signe du fonction affine. Autrement dit il faut en donner le tableau de signe mais par une justification algébrique et non pas une simple lecture graphique. Rappelons que donner le signe d'une fonction c'est trouer pour quelles valeurs de la variable x les images sont : strictement positives, strictement négatives et nulles.

Exemple.

Soit $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -7x + 49 \end{array} \right.$

* On cherche les valeurs de x telles que

$$h(x) > 0$$

Cette inéquation équivaut successivement à :

$$-7x + 49 > 0$$
$$-7x + 49 - 40 > 0 - 49$$
$$-7x > -49$$
$$\frac{-7x}{-7} < \frac{-49}{-7}$$
$$x < 7$$
$$x \in]-\infty; 7[$$

* En procédant comme précédemment nous obtiendrions que l'ensemble des solutions de l'équation $h(x) = 0$ est $\{7\}$.
* Des deux points précédents nous déduisons que $h(x) < 0$ lorsque $x \in]7; +\infty[$.

Nous en déduisons finalement

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

Proposition 1

Soient :

. a et b deux nombres réels,

. $f : x \mapsto ax + b$ la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

Démonstration 1

Supposons $a > 0$ et démontrons qu'alors le tableau de signe proposé convient.

Recherchons pour quelles valeurs de x, $f(x) > 0$.

$$f(x) > 0 \iff ax + b > 0$$
$$\iff ax + b - b > 0 - b$$
$$\iff ax > -b$$

Et comme $a > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff \frac{ax}{a} > -\frac{b}{a} \\ &\iff x > -\frac{b}{a} \\ &\iff x \in \left]-\frac{b}{a}; +\infty\right[\end{aligned}$$

Recherchons de même pour quelles valeurs de x, $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff ax + b = 0 \\ &\iff x = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Remarques.

1. De même si $a < 0$ alors le tableau de signe est

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

2. Si $a = 0$ alors f est la fonction constante égale à b donc elle est toujours du même signe, celui de b.

Exemples.

1. Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x + 8$.
   f est une fonction affine avec $a = 2$ et $b = 8$.
   $a > 0$ et $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{2} = -4$ donc, d'après le cours,

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

2. Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto -4x + 10$.
   g est une fonction affine avec $a = -4$ et $b = 10$.
   $a < 0$ et $-\frac{b}{a} = -\frac{10}{-4} = \frac{5}{2}$ donc

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
g		$+$	0	$-$	

Exercice 2. Application.

Donnez le tableau de signe de f définie sur l'intervalle I dans les différents cas proposés.

1. $f(x) = 2x + 4$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 5x - 15$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = -7x + 14$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = -13x - 39$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = x - \pi$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = -x - 2$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = 3x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
10. $f(x) = 5x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = -4x + 13$, $I = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = -3x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
13. $f(x) = 5x + 12$, $I =]-\infty; -3[$.
14. $f(x) = 6x - 8$, $I = [-12; 10]$.
15. $f(x) = -8x + 12$, $I = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
16. $f(x) = -3x - 24$, $I =]-8; 10[$.

Correction exercice 2

1.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

4.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

5.

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

6.

x	$-\infty$		π		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

7.

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

8.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

9.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

10.

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

11.

x	$-\infty$		$\frac{13}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

12.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

13.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{12}{5}$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

14.

x	-12		$\frac{4}{3}$		10
$f(x)$		$-$	0	$+$	

15.

x	$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$-$	

16.

x	-8		10
$f(x)$	‖	$-$	‖

III Tableau de variation.

Définition 2

Soient :

. I un intervalle non vide et non réduit à un singleton,

. $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Nous dirons que f est *strictement croissante* sur I si et seulement si, quelque soient les nombres α et β choisis dans I, si $\alpha < \beta$, alors $f(\alpha) < f(\beta)$.

Remarques.

1. Nous pouvons définir de même :
   (a) f est *croissante* ssi dès lors que $\alpha < \beta$ alors forcément $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.
   (b) f est *strictement décroissante* ssi dès lors que $\alpha < \beta$ alors forcément $f(\alpha) > f(\beta)$.
   (c) f est *décroissante* ssi dès lors que $\alpha < \beta$ alors forcément $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$.
2. Nous retiendrons que *les fonctions croissantes conservent l'ordre tandis que les fonctions décroissantes ne conservent pas l'ordre*.
3. C'est une définition complexe. Il faut comprendre l'idée correspondante : dire que f est *croissante* c'est dire que *quand les x augmentent les $f(x)$ augmentent aussi*. Il faut commencer à se familiariser avec l'aspect technique.
4. Si le chapitre s'appelle « tableau de variation » en réalité les variations d'une fonction affine sont tellement simples qu'une phrase suffit.

Exemples.

1. La fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$ n'est pas croissante puisque, par exemple : $-3 < -2$ et pourtant $f(-3) > f(-2)$.
   Retenons que pour montrer qu'une fonction n'est pas monotone il suffit de trouver un contre-exemple.

2. Montrons que la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ est strictement croissante conjecture établie avec une calculatrice.
   Il faut démontrer que quelque soient les nombres α et β choisis avec $\alpha < \beta$on a forcément $f(\alpha) < f(\beta)$.

   Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$. Il faut garder des lettres et ne pas remplacer par des valeurs numériques pour que le résultat reste général, vrai quelque soit les nombres choisis. Démontrons qu'alors nécessairement $f(\alpha) < f(\beta$.

   Le raisonnement consiste à partir de l'inégalité $\alpha < \beta$ et de reconstruire la fonction f de par et d'autre d façon à faire apparaître $f(\alpha)$ et $f(\beta)$. Pour cela nous ferons les étapes correspondant aux priorités opératoires.
   L'inégalité $\alpha < \beta$ est successivement équivalente à

$$
\begin{aligned}
2\alpha &< 2\beta, \text{ le sens est conservé car } 2 > 0. \\
2\alpha + 1 &< 2\beta + 1 \\
f(\alpha) &< f(\beta)
\end{aligned}
$$

   Nous avons démontré que si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) < f(\beta)$. Les images et les antécédents sont rangés dans le même ordre.
   Ceci étant vrai quelque soit les α et β choisis nous pouvons affirmer que la fonction f est strictement croissante.

Proposition 2

Soient :

. a et b deux nombres réels,

. f la fonction affine définie par : $f(x) = ax + b$ quelque soient $x \in \mathbb{R}$

(i) Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(ii) Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

(iii) Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration 2

Si $a = 0$ la fonction est évidemment constante.

Démontrons l'un des deux cas l'autre se traitant de la même façon. Supposons par exemple que $a < 0$.

Il faut démontrer que f est strictement décroissante. D'après la définition de la monotonie, il faut donc montrer que quels que soient les nombres réels α et β si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$.

Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$. Cette inégalité est successivement équivalente à :

$$\begin{aligned} a\alpha &> ax\beta \text{ car } a < 0 \\ a\alpha + b &> a\beta + b \\ f(\alpha) &> f(\beta) \end{aligned}$$

On a donc démontrer que si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$. Autrement dit f est strictement décroissante.

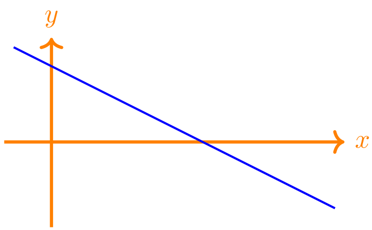
1. Étudions les variations de la fonction h, définie par $h(x) = -12x + 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   h est une fonction affine avec $a = -12$ et $b = 3$. Comme $a < 0$, h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.
Étudiez les variations de toutes les fonctions de l'exercice 2.

La connaissance des variations de la fonction affine permet de retrouver les tableaux de signes en raisonnant à partir de la courbe représentative.

Étudions par exemple le signe de $f : x \mapsto -2x + 4$.

* f est une fonction affine avec $a = -2$ et $b = 4$.
* le coefficient directeur est strictement négatif, $a < 0$ donc f est strictement décroissante.
  Ceci se traduit graphiquement par une droite qui descend. Quelque chose comme :



Nous voyons sur ce schéma que la fonction prend d'abord des valeurs positives puis des valeurs négatives. Autrement dit nous pouvons déjà compléter le tableau de signe de la façon suivante :

x	$-\infty$		?		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

Il nous reste à trouver pour quelle valeur de x, f s'annule.

* f s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{-2} = 2$. Ce résultat a été établi plus tôt dans cette leçon.

Nous en déduisons le tableau de signe de f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

IV Identifier une fonction affine : taux d'accroissement.

Voici un outil pour mesurer la croissance (rapide ou lente) d'une fonction que vous retrouverez en économie ou pour la dérivation (programme de première).

Définition 3

Soient :

. f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$,

. α et β deux nombres de $\mathcal{D}_f$ tels que $\alpha \neq \beta$.

Le *taux d'accroissement de f entre α et β* est le nombre :

$$\tau_f(\alpha,\beta) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Exemples.

1.

Proposition 3

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ a un taux d'accroissement constant si et seulement si c'est une fonction affine.
Dans ce cas son taux d'accroissement est alors son coefficient directeur (pente).

Démonstration 3

Il s'agit ici de démontrer une équivalence (expression « si et seulement si »). L'exemple classique d'équivalence est le théorème de Pythagore : ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Pour démontrer une équivalence il faut procéder en deux temps : une implication et sa réciproque. On montre d'abord que si ABC est rectangle en A alors forcément $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Puis il faut montrer l'implication réciproque : si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors forcément ABC est rectangle en A.

1. Nous allons commencer par une première implication. Supposons que f est une fonction affine et démontrons qu'alors forcément le taux d'accroissement de f est constant (*i.e.* est indépendant des valeurs choisies pour le calculer). Nous savons déjà à quoi sera égale ce taux d'accroissement, puisque la proposition nous indique que ce doit être a.

   Soient α et β deux nombres réels quelconques avec $\alpha < \beta$.
   Par définition du taux d'accroissement :

$$\tau = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

   Et comme $f(x) = ax + b$ (c'est une fonction affine) :

$$\begin{aligned} &= \frac{[a\beta + b] - [a\alpha + b]}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{a\beta + b - a\alpha - b}{\beta - alpha} \\ &= \frac{a\beta - a\alpha}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{a(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

   Comme $\beta - \alpha$ est un facteur commun au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{a}{1} \\ &= a \end{aligned}$$

   Ainsi quels que soient les α et β choisi le taux d'accroissement vaut toujours a donc est constant.

2. Nous allons maintenant établir l'implication réciproque. Supposons maintenant que la fonction f (qui n'est pas a priori affine) a un taux d'accroissement constant et démontrons qu'alors f est forcément une fonction affine.

   Notons a (comme par hasard) la valeur constante (indépendamment du choix des valeurs de α et β) du taux d'accroissement :

$$a = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Cette égalité étant vraie quelques soient les valeurs choisies pour α et β en particulier, en choisissant $\alpha = 0$ nous obtenons :

$$a = \frac{f(\beta) - f(0)}{\beta - 0}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{f(\beta) - f(0)}{\beta} \\
a \times \beta &= \frac{f(\beta) - f(0)}{\beta} \times x_2 \text{ car } \beta \neq 0 \\
a\beta &= f(\beta) - f(0) \\
a\beta + f(0) &= f(\beta) - f(0) + f(0) \\
a\beta + f(0) &= f(\beta)
\end{aligned}$$

Et en notant x plutôt que β (comme par hasard) nous obtenons : $f(x) = ax + f(0)$.
Autrement dit f est bien une fonction affine.

En raisonnant par double implication nous avons démontré la proposition.

Remarques.

1. La démonstration est basée sur la recherche du contre-exemple. Une fonction est affine si et seulement si son taux d'accroissement est toujours le même quelques soient les valeurs (distinctes) choisies pour x_1 et x_2. Donc pour montrer qu'un fonction n'est pas affine il faut trouver deux couples de valeurs x_1 et x_2 pour lesquelles le taux d'accroissement n'est pas le même.
2. Le taux d'accroissement réapparaîtra dans la leçon sur l'étude des droites. Confer les derniers exercices.

Exemples.

1. Si f est un fonction affine telle que $f(1) = 2$ et $f(3) = 4$ alors son coefficient directeur est
$$a = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{4 - 2}{2} = 1.$$
2. Démontrons que la fonction carré n'est pas une fonction affine.

   Choisissons $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$ alors

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} &= \frac{1^2-0^2}{1-0}\\ &= 1\end{aligned}$$

Si par contre nous choisissons $x_1 = 2$ et $x_2 = 0$ alors

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} &= \frac{2^2-0^2}{2-0}\\ &= 2\end{aligned}$$

Le taux d'accroissement de la fonction carré n'est pas constant donc

la fonction carrée n'est pas une fonction affine.

3. De même : $\frac{1^3-0^3}{1-0} = 1$ et $\frac{2^3-0^3}{1-0} = 8$. La fonction cube n'est donc pas une fonction affine.
4. De même : $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{2-3} = -\frac{1}{6}$ et $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{2-4} = -\frac{1}{4}$. La fonction inverse n'est donc pas une fonction affine.
5. De même : $\frac{\sqrt{9}-\sqrt{25}}{9-25} = \frac{1}{8}$ et $\frac{\sqrt{9}-\sqrt{4}}{9-4} = \frac{1}{5}$. La fonction racine carrée n'est donc pas une fonction affine.

V Exercices.

Exercice 4.

Une patinoire propose deux tarifs :
— tarif A : chaque entrée coûte 5,25 €.
— tarif B : un abonnement annuel de 12 € et chaque entrée coûte alors 3,50 €.

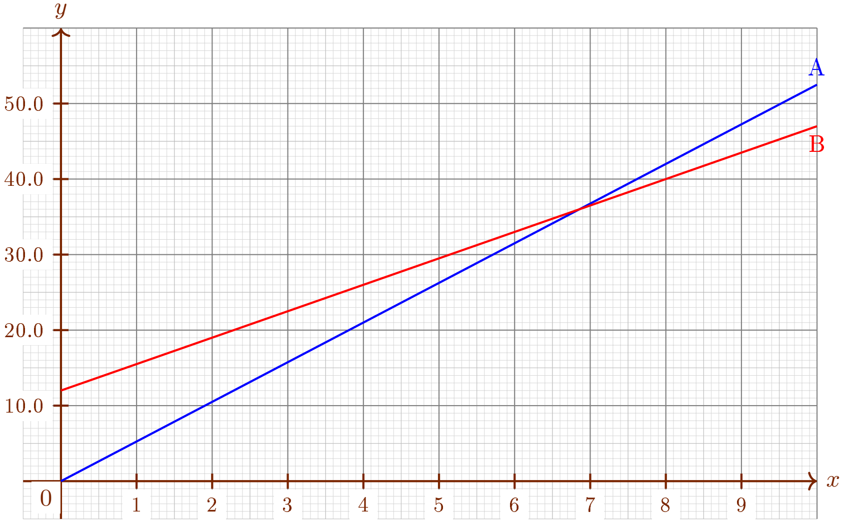
x désigne le nombre de fois qu'un patineur a fréquenté la patinoire.

1. (a) Donnez l'expression de la fonction f qui modélise le budget annuel pour la patinoire avec le tarif A et celle de g pour le tarif B.
   (b) Tracez ces deux fonctions dans un repère approprié (attention au choix des unités).
2. (a) Résolvez graphiquement $f(x) > g(x)$.
   (b) Résolvez par le calcul $f(x) > g(x)$.
   (c) Que peut faire le patineur de ces solutions quand il veut déterminer lequel des deux tarifs est le plus avantageux ?

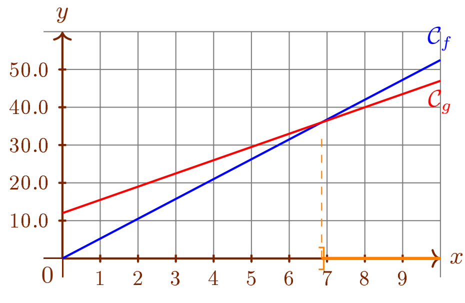
Correction exercice 4

1. (a) $f(x) = 5{,}25x$ et $g(x) = 3{,}50x + 12$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

   (b) pour le tracer de la courbe représentative d'une fonction affine revoyez l'exercice 1 de cet leçon.



2. (a)



   Par lecture graphique

l'ensemble des solutions de $f(x) > g(x)$ est $]6; +\infty[$.

   (b) Résolvons l'inéquation linéaire $f(x) > g(x)$.

   Cette inéquation équivaut successivement à

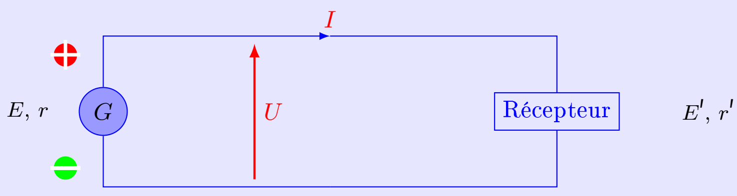
$$
\begin{aligned}
5{,}25x &> 3{,}5x + 12 \\
5{,}25x - 3{,}5x &> 3{,}5x + 12 - 3{,}5x \\
(5{,}25 - 3{,}5)x &> 12 \\
1{,}75x &> 12 \\
\frac{1{,}75x}{1{,}75} &> \frac{12}{1{,}75} \\
x &> \frac{48}{7}
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{48}{7}; +\infty\right[.}$

(c) En arrondissant à 10^{-2} par excès $\frac{48}{7} \approx 6{,}86$.

Si le patineur va 7 fois ou plus dans l'année la patinoire il doit choisir le forfait B sinon il doit choisir le forfait A.

Exercice 5.



Dans le circuit ci-dessus, le générateur possède une force électromotrice E et une résistance interne r. La tension U_1 à ses bornes est une fonction affine de l'intensité I du courant électrique selon la formule $U_1 = E - rI$.
De même, le récepteur possède une force contre électromotrice E' et une résistance interne r'. La tension U_2 aux bornes du récepteur est également une fonction affine de l'intensité du circuit I selon la formule $U_2 = E' + r'I$.

1. Nous supposerons que $E = 300\text{V}$, $E' = 200$ V, $r = 10\ \Omega$ et $r' = 5\ \Omega$.

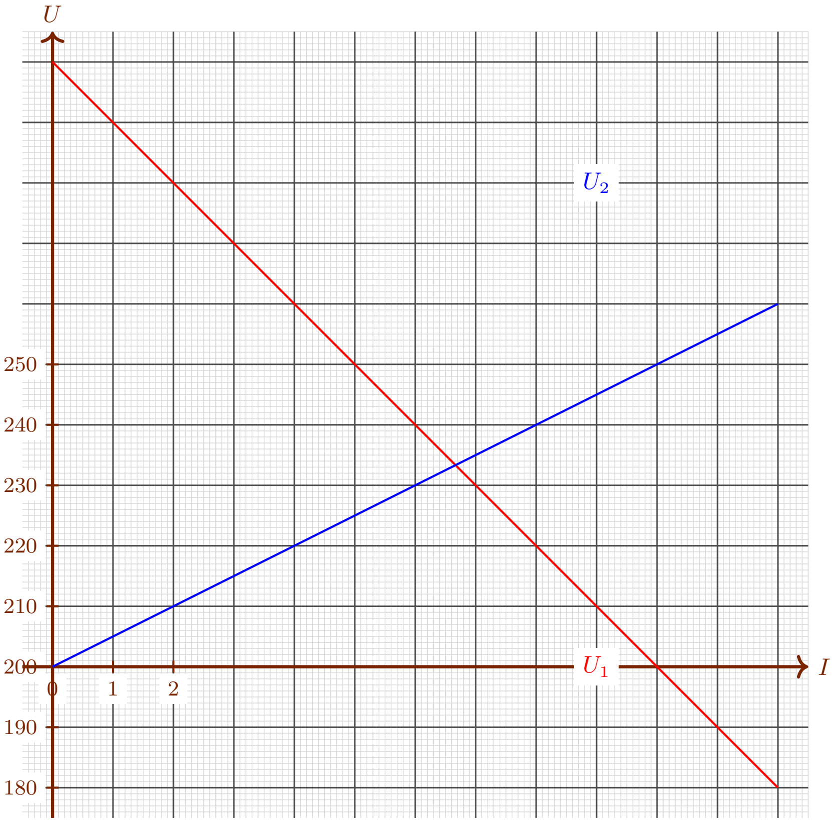
   Tracez dans un même repère la courbe représentative de U_1 en fonction de I et de U_2 en fonction de I.

2. Lorsque le circuit est branché, la tension aux bornes du générateur est égale à la tension aux bornes du récepteur.

   Montrez alors que $I = \frac{E-E'}{r+r'}$.

Correction exercice 5

1. les fonctions $U_1 : I \mapsto E - rI$ et $U_2 : I \mapsto E' + r'I$ sont des fonctions affines et leurs courbe représentatives sont donc des droites.
   Avec les valeurs numériques : $U_1 : I \mapsto 300 - 10 \times I$ et $U_2 : I \mapsto 200 + 5 \times I$.



2. Déterminons l'intensité pour laquelle les tensions aux bornes des générateur et récepteur.

   La tension est la même si et seulement si $U_1 = U_2$. Cette dernière égalité équivaut successivement à

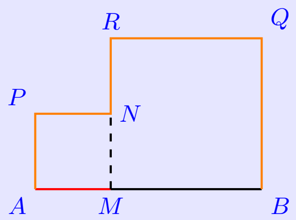
$$E - rI = E' + r'I$$
$$E - rI - E' = r'IE' - E'$$
$$E - E' - rI = r'I$$
$$E - E' - rI + rI = r'I + rI$$
$$E - E' = r'I + rI$$

On identifie un facteur commun :

$$E - E' = (r' + r)I$$
$$\frac{E - E'}{r' + r} = I$$

Lorsque les tensions sont égales $I = \frac{E-E'}{r+r'}$.

Exercice 6.



$AB = 6$ cm. M est un point du segment $[AB]$ et nous noterons $AM = x$. Dans le même demi-plan de frontière (AB), sont construit les carrés $AMNP$ et $MBQR$.
f est la fonction qui à x associe la longueur $f(x)$ de la ligne polygonale $APNRQB$ (tracée en orange sur la figure ci-contre).
La figure a été faite dans le cas où x est compris entre 0 et 3.

Trouvez l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la longueur de la ligne polygonale est comprise entre 14 et 16 cm.

Correction exercice 6

Nous remarquons qu'il y aura deux cas suivant que $x \in [0;3]$ ou $x \in [3;6]$. Nous allons donc raisonner par disjonction des cas.

* Premier cas : supposons $x \in [0;3]$.
  Alors $f(x) = -2x + 18$.
  Nous voulons que $14 \leqslant f(x) \leqslant 16$. Cet encadrement équivaut au système
  $$\begin{cases} 14 \leqslant -2x + 18 \\ -2x + 18 \leqslant 16 \end{cases}$$
  Autrement dit :
  $$\begin{cases} x \leqslant 2 \\ 1 \leqslant x \end{cases}.$$
  Ce qui équivaut encore à : $x \in [0;3] \cap [1 : +\infty[\cap] - \infty; 2]$. Finalement : $x \in [1;2]$.
* Second cas : supposons $x \in [3;6]$.
  Nous pourrions nous contenter d'évoquer la symétrie du problème et affirmer que $[4;5]$ est aussi un ensemble de solutions au problème.
  Nous pouvons également reprendre le précédent raisonnement avec, dans ce cas, $f(x) = 2x + 6$.

L'ensemble des solutions du problème est $[1;2] \cup [4;5]$.

Exercice 7.

Une revue n'est distribuée que sur abonnement annuel. Le nombre d'abonnés $A(x)$ est donné en fonction du prix x de l'abonnement en euros par :

$$A(x) = -50x + 12\,500, \text{ pour } x \geq 0.$$

1. Si l'abonnement est fixé à $x = 50$ €, quel est le nombre d'abonnés $A(x)$?
2. (a) Quel est le sens de variation de la fonction A ?
   (b) Comment évolue le nombre d'abonnés quand le prix de l'abonnement augmente ?
   (c) De combien varie le nombre d'abonnés quand le prix augmente de 1 € ?
3. (a) Calculez $A(250)$.
   (b) Pour quelles valeurs de x a-t-on $A(x) \geqslant 0$?
4. La recette.
   (a) Le prix de l'abonnement est de 50 €.
   Quelle est la recette correspondante ?
   (b) Le prix de l'abonnement est x $(0 \leqslant x \leqslant 250)$. Montrez que la recette est $R(x) = x(-50x + 12\,500)$.
   (c) À l'aide de la calculatrice, dressez le tableau de variation de R puis conjecturez le prix de l'abonnement qui semble assurer la recette maximale.

Correction exercice 7

1. $A(50) = 10\,000$.
2. (a) Déterminons le sens de variation de A.

   A est une foncion affine avec $a = -50$ et $b = 12\,500$.
   Puisque $a < 0$

   A est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

   (b) Quand le prix de l'abonnement augmente le nombre d'abonnés diminue.
   (c) Lorsque le prix de l'abonnement augmente de 1 €, passant de x à $x+1$ alors le nombre d'abonné varie de

$$\begin{aligned} A(x+1) - A(x) &= -50(x+1) + 12\,500 - [-50x + 12\,500] \\ &= -50 \end{aligned}$$

Lorsque l'abonnement augmente de 1 euro le nombre d'abonnés diminue de 50.

3. (a) $A(250) = 0$.

   (b) Résolvons : $A(x) \geq 0$.

   L'inéquation proposée équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
-50x + 12\,500 &\geqslant 0 \\
-50x + 12\,500 - 12\,500 &\geqslant 0 - 12\,500 \\
-50x &\geqslant 12\,500 \\
\frac{-50x}{-50} &\leqslant \frac{12\,500}{-50} \\
x &\leq 250
\end{aligned}$$

$A(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \leqslant 250$.

4. (a) Expression de la recette.

   Si le prix de l'abonnement est de 50 euros, alors le nombre d'abonnés est de $A(50) = 10\,000$.
   La recette est donc par proportionnalité

$$50 \times 10\,000 = 500\,000.$$

Si le prix de l'abonnement de 50 euros alors la recette est de 500 mille euros.

   (b) déterminons la recette pour un abonnement à x euros.

   Si le prix de l'abonnement est de x euros alors, le nombre d'abonné étant de $A(x)$,par proportionnalité,

$$R(x) = x \times A(x)$$

quelque soit $x \in [0; 250]$

$R(x) = x(-50x + 12\,500)$.

(c) Avec la calculatrice nous obtenons une parabole qui présente un sommet dont les coordonnées sont $(125; 781\,250)$.
Donc

$$\boxed{\text{la recette maximale est de } 781\,250 \text{ euros.}}$$

Exercice 8.

Au quotidien pour exprimer une température, on utilise le degré Celsius (noté °C).
En physique et en chimie on préfère utiliser l'unité de température absolue : le kelvin (noté K).
On sait que :
0 °C correspond à 273,15 K ;
0 K (appelé *zéro absolu*) correspond à −273,15 °C.
On sait aussi qu'une augmentation de 1 °C entraîne une augmentation de 1 K.

1. Soit x une température exprimée en degrés Celsius. Déterminez l'expression $f(x)$ de cette température exprimée en kelvins.
2. Soit x une température exprimée en kelvins. Déterminez l'expression $g(x)$ de cette température exprimée en degrés Celsius.
3. Soit x une température exprimée en kelvin. Calculez $f(g(x))$.

Correction exercice 8

1. L'énoncé n'est pas très explicite mais le fait que qu'une augmentation de 1 °C entraîne une augmentation de 1 K peut s'interpréter en disant que la température en kelvin est une fonction affine de la température en degré Celsius et dont le coefficient directeur est donc (taux d'accroissement) égale à 1.
   Ainsi $f(x) = x + b$.
   Pour trouver b utilisons une valeur remarquable. 0 °C correspond à 273,15 K donc on doit avoir : $f(0) = 273{,}15$. Autrement dit $b = 273{,}15$.
   $$\boxed{f(x) = x + 273{,}15}$$
2. De même
   $$\boxed{g(x) = x - 273{,}15}$$
3. $$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x - 273{,}15) \\ &= (x - 273{,}15) + 273{,}15 \\ &= x \end{aligned}$$

$$f(g(x)) = x.$$

Dans ce cas les fonctions f et g sont dites *réciproques* l'une de l'autre. C'est une propriété extrêmement intéressante pour une fonction.

Exercice 9.

Le degré Celsius (noté °C) et le degré Fahrenheit (noté °F) sont deux unités de température.
Dans l'échelle Celsius, la température de fusion de l'eau est de 0 °C et la température d'ébullition est de 100 °C (dans des conditions normales de pression atmosphérique).
Dans l'échelle Fahrenheit, la température de fusion de l'eau est de 30 °F et la température d'ébullition est de 212 °F (dans des conditions normales de pression atmosphérique).
On sait que la relation qui relie degrés Celsius et degrés Fahrenheit est affine.

1. Soit x une température exprimée en degrés Celsius. Déterminez l'expression de $f(x)$ de cette température exprimée en degré Fahrenheit.
2. Soit x une température exprimée en degrés Fahrenheit. Déterminez l'expression de $g(x)$ de cette température exprimée en degré Celsius.
3. Recopiez et complétez le tableau de conversion suivant.

°F	-40	0			23	32	41			68	77			
°C			-15	-10				10	15			30	35	37

Exercice 10.

Exercice 11.

Exercice 20 page 141 du manuel Sesamath : dresser le tableau de signe à partir de la représentation graphique déterminer l'expression algébrique avec l'ordonnée à l'origine puis en résolvant une équation d'inconnue b en choisissant un point quelconque de la droite.

Correction exercice 11

1. Déterminons l'expression algébrique de f.

   Puisque f est une fonction affine, elle admet une expression algébrique de l forme $f(x) = ax + b$. Nous devons donc trouver a et b.

   * Nous avons déjà remarqué que $b = f(0)$. Or, par lecture graphique, $f(0) = 1$ donc $b = 1$.

* Pour calculer a nous allons utiliser une équation. Nous avons trouvé b en utilisant le point de la droite de coordonnées $(0;1)$, or une droite est déterminée par la donnée de deux points donc nous devons considérer un second point.
Le point de coordonnées $(-3;-1)$ appartient à la droite donc $f(-3) = -1$. Cette dernière égalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned} a \times (-3) + 1 &= -1 \\ -3a + 1 &= -1 \\ -3a &= -2 \\ a &= \frac{-2}{-3} \end{aligned}$$

Enfin $a = \frac{2}{3}$.

$$\boxed{f : x \mapsto \frac{2}{3}x + 1.}$$

2. Par lecture graphique

x	$-\infty$		$-1{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 12.

Exercice 21 page 141 du manuel Sesamath. Modifiez l'énoncé en : déterminez l'expression algébrique de la fonction affine représentée dans le repère.

Correction exercice 12

Les techniques vues dans cet exercice seront utiles pour l'étude des droites du plan.

Déterminons l'expression algébrique de la fonction f représentée graphiquement.

Puisque f est une fonction affine elle est de la forme $f(x) = ax + b$.

* b est l'ordonnée à l'origine donc $b = f(0)$. Or graphiquement $f(0) = 1{,}2$ donc $b = 1{,}2$.

* f est une fonction affine donc son coefficient directeur est le taux d'accroissement de f entre n'importe qu'elles valeurs x_1 et x_2 (distinctes).
Choisissons par exemple $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$. Alors

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Par lecture graphique des images :

$$\begin{aligned} a &= \frac{2-(-1)}{-1-3} \\ &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{f : x \mapsto -\tfrac{3}{4}x + 1{,}2.}$$

VI Ce qu'il faut retenir.

1. Reconnaître une fonction affine (définition).
2. Courbe représentative d'une fonction affine : droite.
3. Trouver le signe d'une fonction affine.
4. Trouver les variations d'une fonction affine.