

Tableau de variation.

I Intuitivement.

Les *variations d'une fonction* sont les augmentations ou diminutions des valeurs prises par cette fonction (les images) lorsque les valeurs de la variable (antécédents) augmentent.

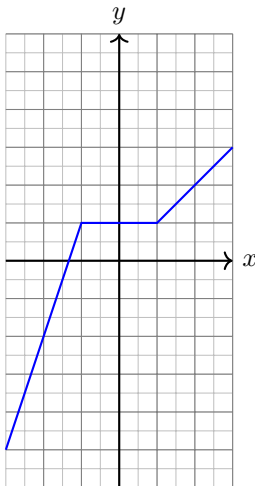
Géométriquement, il s'agit de regarder si la courbe représentative de la fonction monte ou descend lorsque nous parcourons sa ligne de la gauche vers la droite.

II Décrire les variations.

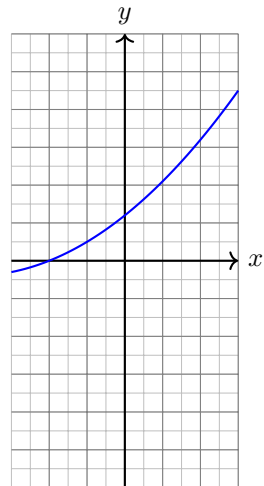
Fonctions monotones.

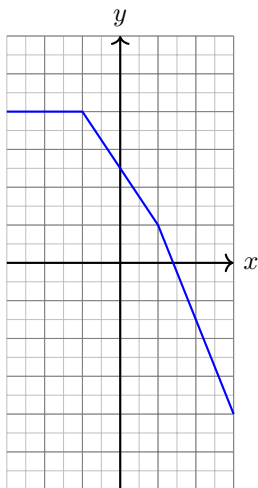
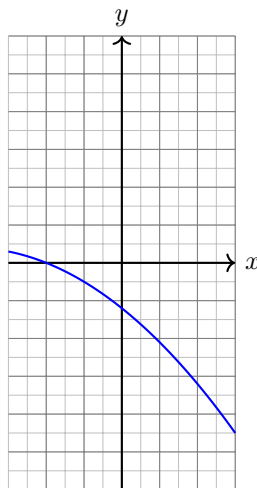
Les *fonctions monotones* sont les fonctions dont le sens de variation ne varie pas.

Fonction *croissante*.

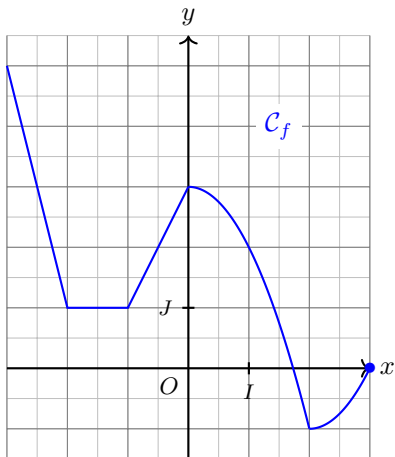


Fonction *strictement croissante*.



Fonction *décroissante*.Fonction *strictement décroissante*.**Fonctions non monotones.**

Une fonction n'est pas monotone lorsqu'elle est tantôt croissante tantôt décroissante. Dans ce cas il faut préciser sur quelles parties elle est croissante ou décroissante.



Nous dirons que :

f est strictement décroissante sur $[-\infty; -2]$,

f est constante sur $[-2; -1]$,

f est strictement croissante sur $[-1; 0]$,

f est strictement décroissante sur $[0; 2]$,

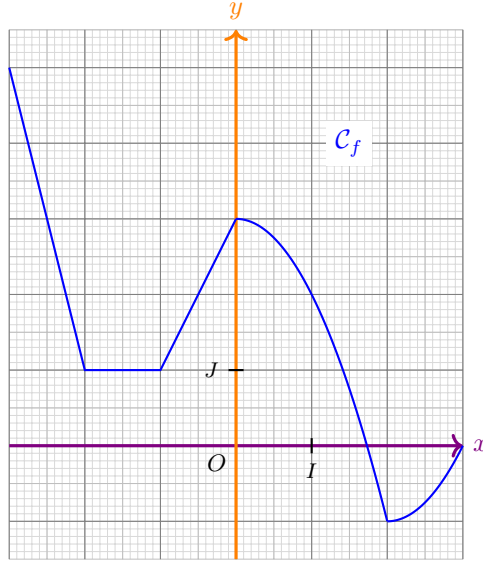
f est strictement croissante sur $[2; 3]$.

La courbe fait également apparaître des *sommet* (points haut ou bas de la

courbe). Nous dirons que, par exemple, f admet un *minimum (absolu) égale à -1 qui est atteint pour $x = 2$* . Ou encore que f admet un *maximum local sur $[-2; 3]$ qui est égale à 3 et qui est atteint en $x = 0$* .

III Schématiser les variations.

Nous schématiserons la courbe représentative de la fonction par un *tableau de variation*.



x	$-\infty$	-2	-1	0	2	3
f	□	1	1	3	-1	0

Remarques.

1. Dans un tableau de variation apparaissent bien sûr les variations mais aussi les *extremum* (*minimum* ou *maximum*, *absolu* ou *local*).
2. Les valeurs dans un tableau de variation sont toutes exactes. Pas de valeur approchée.
3. Il est possible de décrire les variations de la fonction à partir du tableau de variation sans connaître la courbe représentative.

Exercice 1. ♥

Exercice 8 page 122 (Sesamath).
Exercice 9 page 122 (Sesamath).
Exercice 10 page 122 (Sesamath).

Exercice 2. ♥

Exercice 14 page 123 (Sesamath). Lire un tableau de variation. Maxima et minima.

IV Utiliser les variations d'une fonction pour comparer les images.

Les fonctions croissantes conservent l'ordre et les fonctions décroissantes inversent l'ordre.

Nous ne pourrions rien dire pour une fonction qui n'est pas monotone.

Exercice 3.

Exercice 21 page 124 (Sesamath). Comparer avec un tableau de variation.

V Exercices.

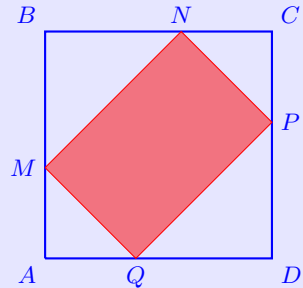
Exercice 4.

Soit $ABCD$ le carré de côté 5 représenté ci-contre.

M , N , P et Q sont des points mobiles respectivement sur les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ de telle sorte que les longueurs AM , AQ , CN et CP restent égales.

On a donc : $AM = AQ = CN = CP$.

Le problème a pour objectif d'étudier l'aire (variable) du quadrilatère $MNPQ$.



1. Choix d'une variable.

- À quelle(s) variable(s) peut-on associer l'aire de $MNPQ$?
- On note $x = AQ$. Quelles sont les valeurs que peut prendre x ?

2. Détermination de l'aire par un calcul.

- Exprimez en fonction de x l'aire de chacun des triangles AMQ et BMN .
- Déduisez-en que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ se calcule avec la formule $10x - 2x^2$.
- Précisez, avec les notations fonctionnelles, la fonction f que l'on a construit.

3. Découverte des variations de la fonction f .

- Recopiez et complétez le tableau de valeurs ci-dessous pour $f(x) = 10x - 2x^2$.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$											

- Une autre façon de voir les choses est de tracer la courbe représentative de f avec la calculatrice :

```

Graph1 Graph2 Graph3 FENETRE
\Y1=10X-2*X^2
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
Xmin=-.5
Xmax=5.5
Xgrad=1
Ymin=-1
Ymax=15
Ygrad=1
Xrés=1

```

Qu'apporte de plus cette méthode par rapport à la précédente ?

- Comment varie $f(x)$ lorsque x augmente ?
- Tracez le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.
- Comment obtenir une aire maximale pour $MNPQ$?

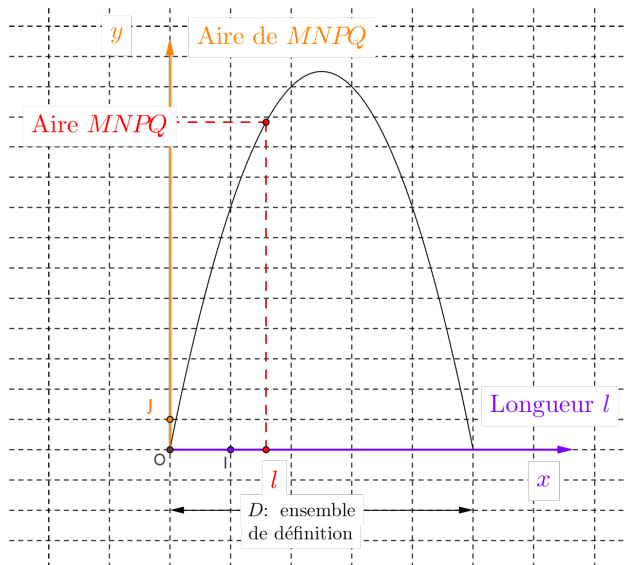
4. Les résultats ont-ils été démontrés ou conjecturés ?

Correction exercice 4

1. (a)
- (b)
2. (a)
- (b)
- (c)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	0	4,5	8	10,5	12	12,5	12	10,5	8	4,5	0

3. (a)
- (b)



Cliquez sur l'image pour obtenir la version dynamique.

- (c) — lorsque x augmente passant de 0 à 2,5 l'aire $MNPQ$ augmente elle aussi passant de 0 à 12,5 ;
- lorsque x augmente encore passant de 2,5 à 5 l'aire de $MNPQ$ au contraire diminue passant progressivement de 12,5 à 0.

- (d)

x	0	2,5	5
f	0	12,5	0

(e)

4.

Exercice 5.

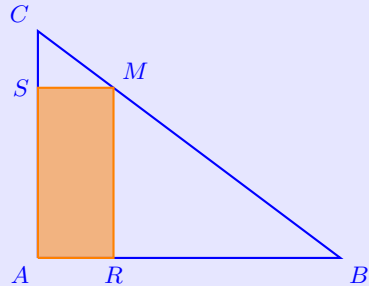
Construisez le triangle ABC rectangle en A avec $AB = 8$ et $AC = 6$.

Un point R est mobile sur le segment $[AB]$.

On place les points M et S sur les segments $[BC]$ et $[AC]$ de telle sorte que $ASMR$ soit un rectangle.

On considère la fonction f qui à la longueur AR associe l'aire du rectangle $ASMR$.

On cherche ici à rendre l'aire du rectangle maximale.



1. Dessinez à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique la figure. On s'assurera de la réussite de la construction de la façon suivante : lorsqu'on déplace le point R sur le segment $[AB]$, le quadrilatère $ASMR$ reste un rectangle.
2. Dessinez le polygone (avec la commande correspondante dans geogebra) $ASMR$ et remarquez que l'aire du rectangle est alors indiquée dans la colonne algèbre.
3. En déplaçant le point R conjecturez l'aire maximale du rectangle $ASMR$.

Exercice 6. Application.

Exercices 7 page 121 jusqu'à 12 page 122 : passer de la courbe au tableau de variation et réciproquement.

Exercice 7. Application.

Exercice 15 page 123.

Exercice 8. Application.

Exercice 19 page 123 lecture des extremums dans un tableau de variation.

Exercice 9.

1. La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?
« Si f est strictement décroissante sur $[0; 4]$ alors $f(0) > f(4)$. »
2. Énoncez sa réciproque. Est-elle vraie ou fausse ?

Correction exercice 9

1. Nous verrons dans une leçon ultérieure que cette proposition est vraie car il s'agit d'une conséquence immédiate du fait qu'une fonction est strictement décroissante.
2. Réciproque : « Si $f(0) > f(4)$ alors f est strictement décroissante ».

La réciproque est fausse.

Par exemple considérons la fonction définie sur $[0; 4]$ à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x + 5, & \text{si } x \in [0, 2] \\ 3, & \text{si } x \in]2, 4] \end{cases}$$

VI Ce qu'il faut retenir.

1. Décrire les variations et extremums d'une fonction par des phrases à partir de sa représentation graphique ou d'un tableau de variation.
2. Construire un tableau de variation à partir de la représentation graphique.
3. Construire des courbes représentatives à partir d'un tableau de variation.
4. Comparer les nombres, les images, grâce aux variations des fonctions.

Tableau de variation.