Fonctions, équations et inéquations.

I Définition des fonctions.

Une fonction : des liens.

Une fonction f indique des liens entre des nombres. Par exemple pour indiquer que f relie le nombre 2 au nombre 3 nous écrirons :

$$f(2) = 3.$$

Nous dirons alors que 2 est *un antécédent* de 3 par f.
Nous dirons aussi que 3 est *l'image* de 2 par f.

Représenter des liens par une formule de calcul.

Très souvent les liens entre les nombres seront représentés par des calculs. Par exemple nous écrirons

$$f : x \mapsto 2x - 1,$$

pour indiquer qu'à chaque nombre x choisi nous associerons le résultat du calcul $2x - 1$.

Ce lien que vous avez déjà rencontré au collège défini une fonction affine.

Représenter des liens par un tableau de valeurs.

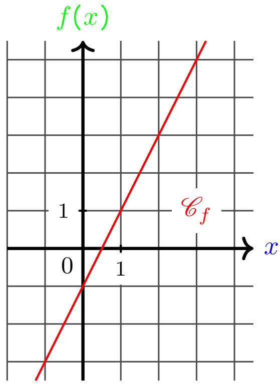
Il est possible de représenter les nombres reliés par une fonction en les plaçant en vis-à-vis dans un tableau.
Par exemple, en utilisant la fonction affine précédente, nous voyons :

$$f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -3.$$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

Représenter des liens par un graphique.

Nous utiliserons en général le tableau de valeurs pour placer quelques points indiquant des liens de la fonction. Puis nous indiquerons par une courbe toutes les valeurs intermédiaires.



Une définition.

Définition 1

Soit $\mathscr{D}$ un ensemble de nombres.

On définit une *fonction f sur $\mathscr{D}$* en associant à chaque nombre x appartenant à $\mathscr{D}$ un seul nombre y, noté $f(x)$.

Nous dirons que f est une fonction de la *variable* x.

La *courbe représentative de f*, que nous noterons souvent $\mathscr{C}_f$ est l'objet géométrique formé de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans $\mathscr{D}$.

$\mathscr{D}$ est *l'ensemble* (ou *domaine*) *de définition* de f. $\mathscr{D}$ est l'ensemble des nombres auxquels un nombre est associé par f. On dit que f est définie sur $\mathscr{D}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y \end{array} \right.$$

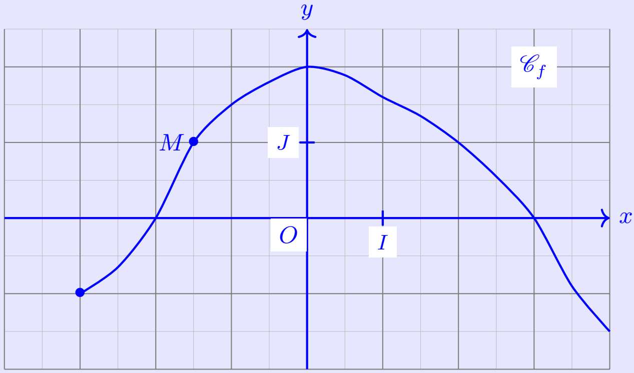
Cette présentation se lit : « la fonction f, définie sur $\mathscr{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et qui à x associe y ».

x est *un antécédent* de y par f.

y est *l'image* de x par f. On le note $f(x)$ et on lit « f de x ».

Exercice 1. ♥

Une fonction f est représentée ci-dessous dans un repère (O,I,J).



Répondez aux questions suivantes sans justification.

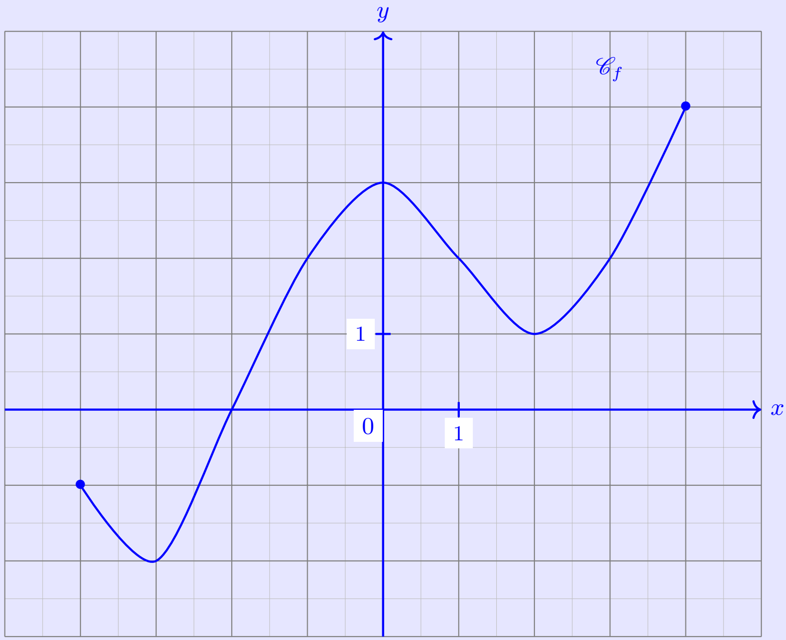
1. Donnez l'ensemble de définition de f.
2. Quel est l'image de 2 par f.
3. Quel est l'ensemble des antécédents de 0 par f ?
4. Quel est l'ensemble des antécédents de -2 par f ?
5. Quel est l'ensemble des antécédents de 2 par f ?
6. Quel est l'ensemble des antécédents de 2,5 par f ?
7. Si x appartient à $[-1{,}5; 1]$ que peut-on dire de $f(x)$?
8. Quel est l'abscisse de M ?
9. Quel est l'ordonnée de M ?

Exercice 2. Application.

Graphique de l'exercice 53 page 90 du Sésamath : ensemble de définition, image et antécédents.

Exercice 3. Application.

Une fonction numérique f est représentée ci-après.



Dans cet exercice nous adopterons la notation suivante : $f([0;1])$ désignera l'ensemble de toutes les images des nombre compris entre 0 et 1, $f^{-1}([0;1])$ désignera l'ensemble de tous les antécédents des nombres compris entre 0 et 1.

1. Déterminez $f([0;1])$.
2. Déterminez $f([1;3])$.
3. Déterminez $f^{-1}([0;1])$.
4. Déterminez $f^{-1}([-2;2])$.

Exercice 4. ♥

Exercice 24 page 86 du manuel Sésamath : Reconnaître la courbe représentative d'une fonction.

Exercice 5.

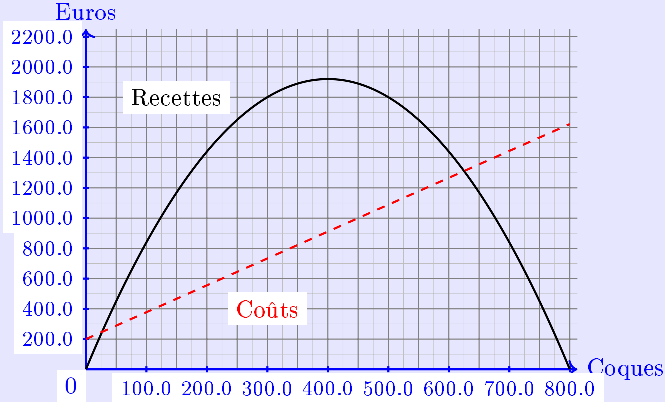
Soient $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Donnez l'ensemble de définition de f.
2. Donnez l'ensemble de définition de g.
3. Déduisez des deux questions précédentes l'ensemble de définition de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

Exercice 6. ♥

Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles.

Sur le graphique donné ci-dessous sont tracées les courbes représentant les recettes (en trait plein) et les coûts (en pointillés), en fonction du nombre de coques fabriquées exprimé en centaines d'unités.
Les ateliers permettent la fabrication de 0 à 800 coques.
Les recettes et les coûts sont exprimés euros.



Les réponses aux questions suivantes sont à justifier par lecture graphique avec, éventuellement, des tracés sur le graphique.

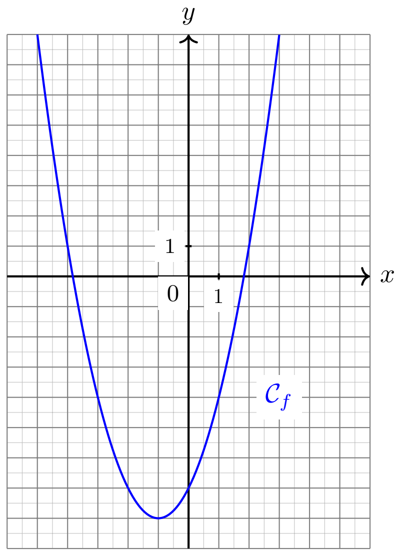
1. Étude du coût.
   (a) Quel est le coût de production de 125 coques ?
   (b) Pour quelle quantité de coques fabriquées le coût est-il de 1 000 euros ?
2. Étude de la recette.
   (a) Quelle est la recette occasionnée par la vente de 500 coques ?
   (b) Pour quel nombre de coques fabriquées la recette est-elle de 1 300 euros ? de 2 000 euros ?
3. Étude du bénéfice.
   (a) Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût.
   Quel est le bénéfice pour une production de 450 coques ?
   (b) Lorsque le bénéfice est positif on dit que l'entreprise est bénéficiaire.
   Dans quels cas l'entreprise est-elle bénéficiaire ?

II "Résolution graphique" d'équation.

Pour conjecturer les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 7 = 3$ nous introduisons la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array}$$

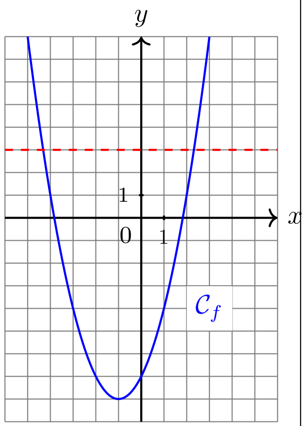
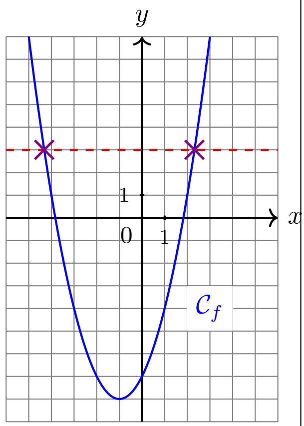
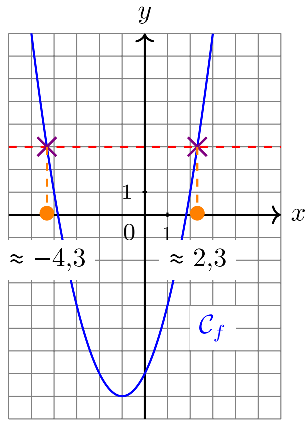
puis traçons sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ avec un logiciel :



Résoudre l'équation équivaut donc à rechercher les antécédents de 3 par la fonction f.

Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 3.

Concrètement pour les trouver il faut suivre les étapes suivantes.

1	2	3
Dessinez l'ordonnée 3.	Identifiez les points d'intersections.	Lire les abscisses correspondantes.
		

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $x^2+2x-7 = 3$ est $\{-4{,}3\ ;\ 2{,}3\}$.

Remarques.

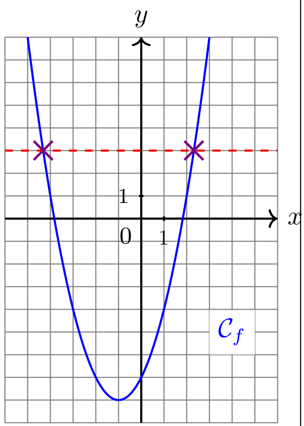
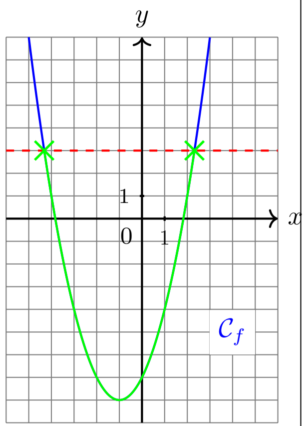
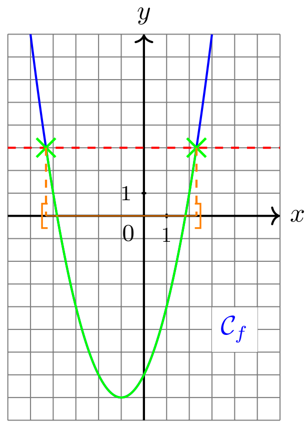
1. Inconvénients de la méthode :
   — Comme pour toute lecture graphique les résultats sont approximatifs (insuffisant en mathématique)
   — il s'agit d'une partie de la courbe et nous ne savons pas ce qu'il en est pour le reste de la courbe.

III "Résolution graphique" d'inéquation : $f(x) \leq a$ (avec $a \in \mathbb{R}$).

Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 3$ nous introduisons encore la fonction $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array}$ puis traçons sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ avec un logiciel.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée plus petite ou égale à 3.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2	3
Dessinez l'ordonnée 3.	Identifiez les points de la courbe dont l'ordonnée est plus petite que 3.	Lire les abscisses correspondantes.
		

Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 3$ est $[-4{,}3\ ;\ 2{,}3]$.

Remarquons enfin que si l'inégalité avait été stricte ($x^2 + 2x - 7 < 3$) l'ensemble des solutions eut été ouvert ($]-4{,}3\ ;\ 2{,}3[$).

Exercice 7. ♥

Exercice 32 page 104 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations, réunion, ouverts, fermés.

Exercice 8. Application.

Exercice 31 page 104 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.

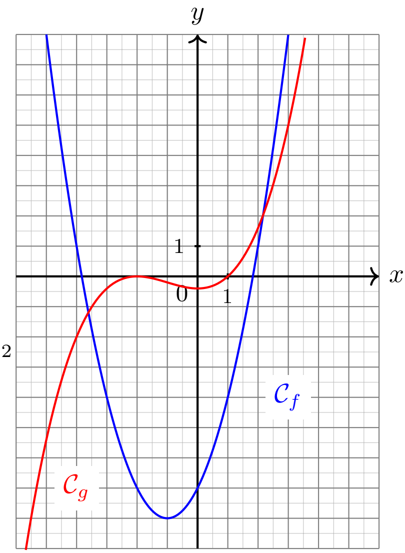
IV "Résolution graphique" d'inéquation : $f(x) \leq g(x)$.

Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 0{,}1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2$ nous introduisons encore les fonctions

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array} \quad \text{et}$$

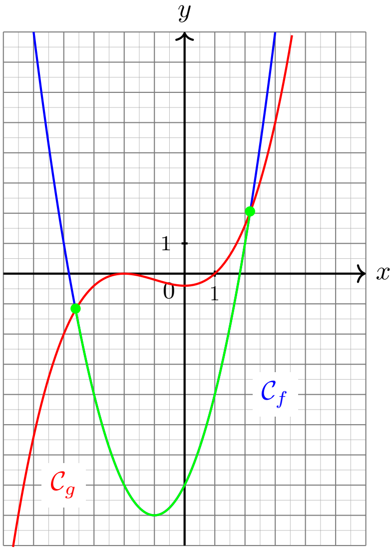
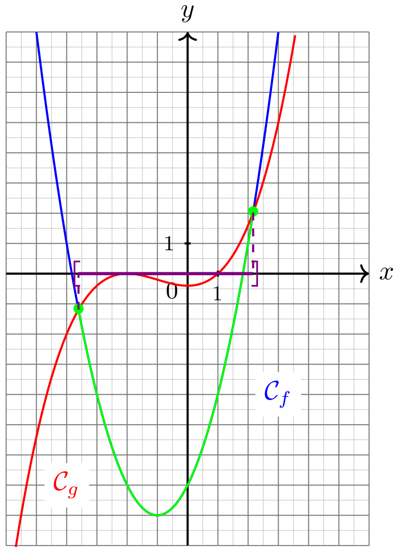
$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0{,}1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2 \end{array}$$

puis traçons leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ avec un logiciel.



Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés en dessous de ceux de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2
Identifiez les points de $\mathcal{C}_f$ situés en dessous de ceux de $\mathcal{C}_g$.	Lire les abscisses correspondantes.
	

Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 0{,}1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2$ est $[-3{,}6\ ;\ 2{,}2]$.

Exercice 9. Application.

Exercice 33 page 105 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.

Exercice 10. Application.

Exercice 35 page 105 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.