Fonctions, équations et inéquations.

Il ne s'agit pas réellement de résolution. La lecture graphique n'offrant que des valeurs approchées, il s'agit en fait d'un outil de conjecture. Cette leçon relève des mathématiques appliquées.

I Définition des fonctions.

Une fonction : des liens.

Une fonction f indique des liens entre des nombres. Par exemple pour indiquer que f relie le nombre 2 au nombre 3 nous écrirons :

$$f(2) = 3.$$

Nous dirons alors que 2 est *un antécédent* de 3 par f.
Nous dirons aussi que 3 est *l'image* de 2 par f.

Représenter des liens par une formule de calcul.

Très souvent les liens entre les nombres seront représentés par des calculs. Par exemple nous écrirons

$$f : x \mapsto 2x - 1,$$

et nous lirons « la fonction f qui à x associe $2x - 1$ », pour indiquer qu'à chaque nombre x choisi nous associerons le résultat du calcul $2x - 1$.

Ce lien que vous avez déjà rencontré au collège défini une fonction affine.

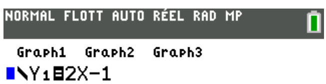
Représenter des liens par un tableau de valeurs.

Il est possible de représenter les nombres reliés par une fonction en les plaçant en vis-à-vis dans un tableau.
Par exemple, en utilisant la fonction affine précédente, nous voyons :

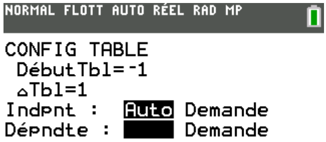
$$f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -3.$$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

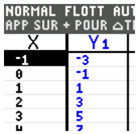
Il est possible d'obtenir un tel tableau grâce à votre calculatrice. Appuyez sur $\boxed{f(x)}$. Entrez la formule de calcul pour f :



Faites 2de puis fenêtre (*def tab*). Choisissez -1 comme première valeur de x et un pas de 1 (augmentation de la valeur de x).

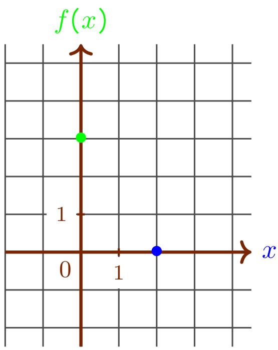


Enfin pour voir le tableau de valeur faites 2de puis graphe (*table*).

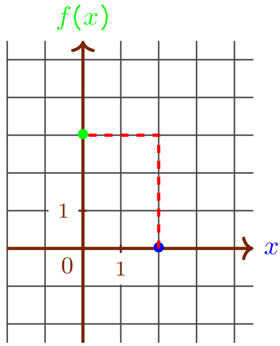


Représenter des liens par un graphique.

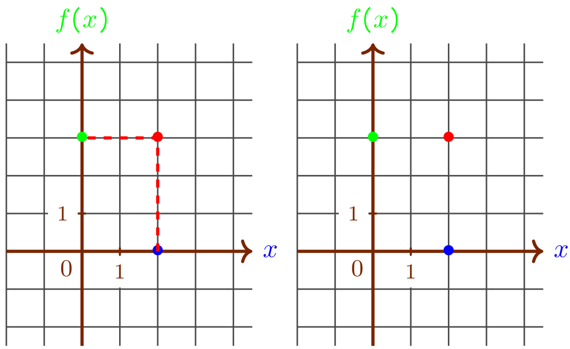
Pour représenter graphiquement le lien $f(1) = -0{,}5$ nous écrirons, dans un repère cartésien, 1 en abscisse et 0,5 en ordonnée.



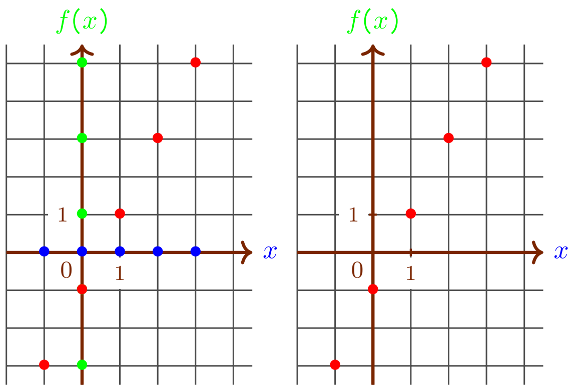
Pour indiquer que ces deux points doivent être associés nous pourrions indiquer un chemin les reliant :



Pour alléger le dessin nous indiquerons uniquement l'angle droit du chemin par un point.



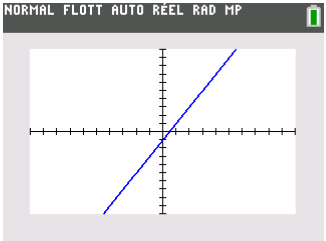
De même nous pourrions indiquer tous les liens du tableau de valeurs précédent :



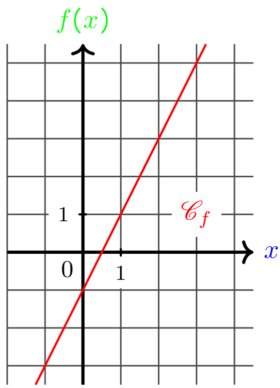
Nous utiliserons en général le tableau de valeurs pour placer quelques points indiquant des liens de la fonction. Puis nous indiquerons par une courbe toutes les valeurs intermédiaires.

Pour avoir une idée de la forme de la courbe de tous les points représentant les liens nous utiliserons la calculatrice.

Appuyez sur $\boxed{\text{zoom}}$ puis choisissez *6 :ZStandard*. Appuyez maintenant sur $\boxed{\text{graphe}}$.



Nous voyons qu'il s'agit d'une droite nous pouvons alors la tracer en reliant les points déjà placés.



Une définition.

Définition 1

Soit $\mathscr{D}$ un ensemble de nombres.

On définit une *fonction* f *sur* $\mathscr{D}$ en associant à chaque nombre x appartenant à $\mathscr{D}$ un seul nombre y, noté $f(x)$.

Nous dirons que f est une fonction de la *variable* x.

La *courbe représentative de* f, que nous noterons souvent $\mathscr{C}_f$ est l'objet géométrique formé de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans $\mathscr{D}$.

$\mathscr{D}$ est *l'ensemble* (ou *domaine*) *de définition* de f. $\mathscr{D}$ est l'ensemble des nombres auxquels un nombre est associé par f. On dit que f est définie sur $\mathscr{D}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y \end{array} \right.$$

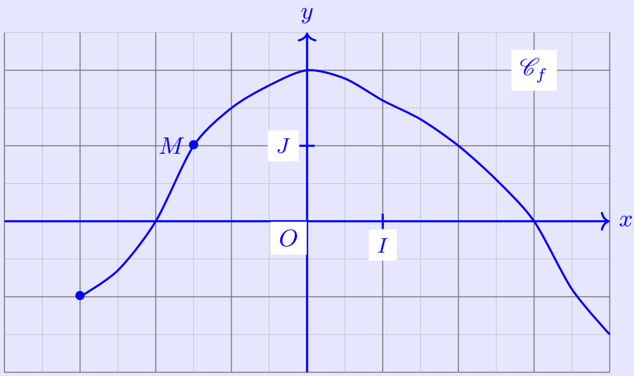
Cette présentation se lit : « la fonction f, définie sur $\mathscr{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et qui à x associe y ».

x est *un antécédent* de y par f.

y est *l'image* de x par f. On le note $f(x)$ et on lit « f de x ».

Exercice 1.

Une fonction f est représentée ci-dessous dans un repère (O,I,J).



Répondez aux questions suivantes sans justification.

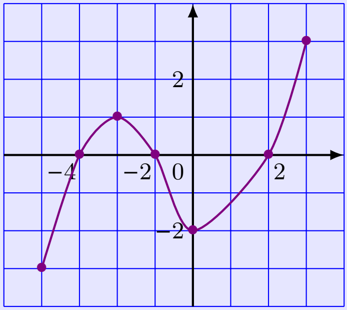
1. Donnez l'ensemble de définition de f.
2. Quel est l'image de 2 par f.
3. Quel est l'ensemble des antécédents de 0 par f ?
4. Quel est l'ensemble des antécédents de -2 par f ?
5. Quel est l'ensemble des antécédents de 2 par f ?
6. Quel est l'ensemble des antécédents de 2,5 par f ?
7. Si x appartient à $[-1{,}5; 1]$ que peut-on dire de $f(x)$?
8. Quel est l'abscisse de M ?
9. Quel est l'ordonnée de M ?

Correction exercice 1

Par convention : sur une courbe représentative dessinée (contrairement à ce que montre la calculatrice) toute l'information est visible. Un point signifie que la courbe s'arrête à cet endroit. Si la courbe continue jusqu'au bord c'est que la courbe continue indéfiniment de la même façon.

Exercice 2. Application.

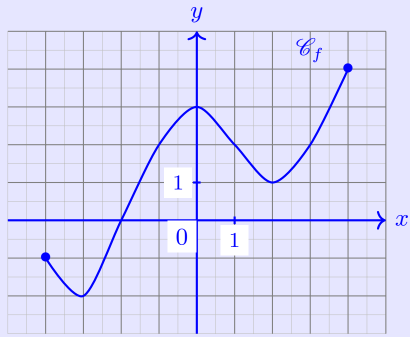
On considère une fonction f définie sur $[-4;3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quels sont le (ou les) antécédent(s) de 0 par f ?
3. Combien d'antécédent(s) possède 2 ?
4. Quel est le nombre d'antécédent(s) de 1 ?
5. Donner un nombre réel m qui n'a qu'un unique antécédent par f.
6. Donner le nombre d'antécédent(s) de t par f, suivant les valeurs de t.

Exercice 3. Application.

Une fonction numérique f est représentée ci-après.

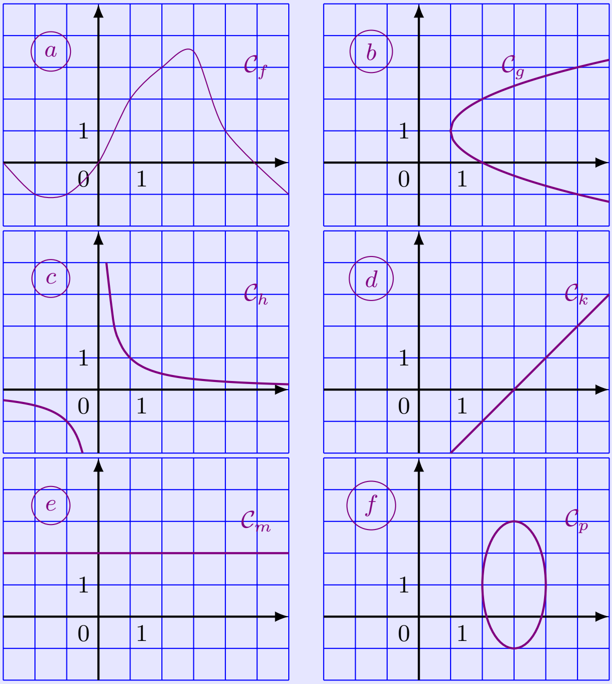


Dans cet exercice nous adopterons la notation suivante : $f([0;1])$ désignera l'ensemble de toutes les images des nombre compris entre 0 et 1, $f^{-1}([0;1])$ désignera l'ensemble de tous les antécédents des nombres compris entre 0 et 1.

1. Déterminez $f([0;1])$.
2. Déterminez $f([1;3])$.
3. Déterminez $f^{-1}([0;1])$.
4. Déterminez $f^{-1}([-2;2])$.

Exercice 4. ♥

Parmi les graphiques proposés, lesquels correspondent à la représentation graphique d'une fonction ?



Exercice 5.

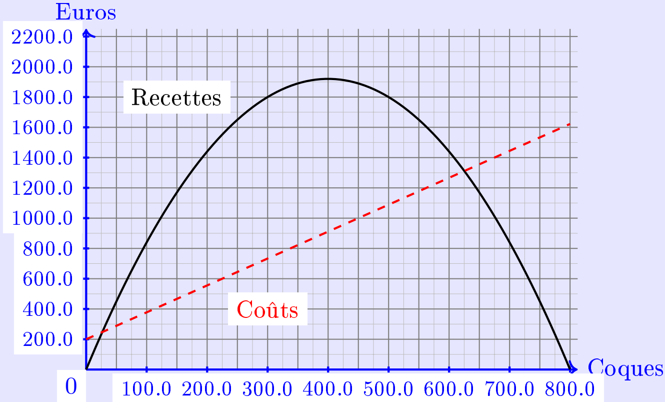
Soient $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Donnez l'ensemble de définition de f.
2. Donnez l'ensemble de définition de g.
3. Déduisez des deux questions précédentes l'ensemble de définition de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

Exercice 6. ♥

Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles.

Sur le graphique donné ci-dessous sont tracées les courbes représentant les recettes (en trait plein) et les coûts (en pointillés), en fonction du nombre de coques fabriquées exprimé en centaines d'unités.
Les ateliers permettent la fabrication de 0 à 800 coques.
Les recettes et les coûts sont exprimés euros.



Les réponses aux questions suivantes sont à justifier par lecture graphique avec, éventuellement, des tracés sur le graphique.

1. Étude du coût.
   (a) Quel est le coût de production de 125 coques ?
   (b) Pour quelle quantité de coques fabriquées le coût est-il de 1 000 euros ?
2. Étude de la recette.
   (a) Quelle est la recette occasionnée par la vente de 500 coques ?
   (b) Pour quel nombre de coques fabriquées la recette est-elle de 1 300 euros ? de 2 000 euros ?
3. Étude du bénéfice.
   (a) Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût.
   Quel est le bénéfice pour une production de 450 coques ?
   (b) Lorsque le bénéfice est positif on dit que l'entreprise est bénéficiaire.
   Dans quels cas l'entreprise est-elle bénéficiaire ?

II Parité.

Si la courbe représentative de la fonction permet de relier deux nombres par un point du plan, historiquement ce sont les coordonnées qui servaient à décrire un point. L'outil fonction a pour origine l'étude des courbes géométrique (en passant par les équations dont nous parlerons plus tard).

Historiquement les liens entre la formule de calcul et les propriétés géométriques de la courbe ont été beaucoup étudiées.

Nous allons étudier une de ces propriétés appelée la parité.

Définition algébrique.

Définition 2

Soient :

. $\mathscr{D}_f$ un ensemble de réels symétrique par rapport à 0, autrement dit si $x \in \mathscr{D}_f$, alors $-x \in \mathscr{D}_f$,

. $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$.

Nous dirons que f est *paire* si et seulement si, quelque soit $x \in \mathscr{D}_f$,

$$f(-x) = f(x).$$

Nous dirons que f est *impaire* si et seulement si, quelque soit $x \in \mathscr{D}_f$,

$$f(-x) = -f(x).$$

Exemples.

1. Parmi les fonctions classiques.
2. La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x - 3 \end{array} \right.$ n'est ni paire ni impaire.
3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \frac{1}{x} \end{array} \right.$ est une fonction impaire.

Exercice 7.

Complétez les tableaux de signe sachant que la fonction est paire ou impaire.

Exercice 8.

Parmi les tableaux de signe suivants, déterminez ceux qui peuvent correspondent à des fonctions paires ou impaires.

Exercice 9.
Déterminez toutes les valeurs de a et b des réels pour lesquels la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est impaire.
Même question pour paire.

Interprétation géométrique.

Définition 3

Soient :
. $\mathscr{D}_f$ un ensemble de réels symétrique par rapport à 0,
. $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$,
. $\mathscr{D}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O,I,J).

(i) f est paire si et seulement si sa courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

(ii) f est impaire si et seulement si sa courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, présente une symétrie par rapport à l'origine du repère.

Démonstration 1

(i) (a) Démontrons l'implication directe : supposons que f est paire et démontrons qu'alors, forcément, $\mathscr{C}_f$ présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
Soit $x \in \mathscr{D}_f$.
Par définition de la courbe représentative : $P\left(x,f(x)\right) \in \mathscr{C}_f$ et $P^{'}\left(-x,f(-x)\right) \in \mathscr{C}_f$.

- Puisque P et $P^{'}$ ont la même ordonnée : $(PP^{'}) \parallel (OI)$. Nous en déduisons, le repère étant orthogonal : $(PP^{'}) \perp (OJ)$.
- De plus le milieu de $[PP^{'}]$ est le point $M(0,f(x))$. Donc $M \in (OJ)$.

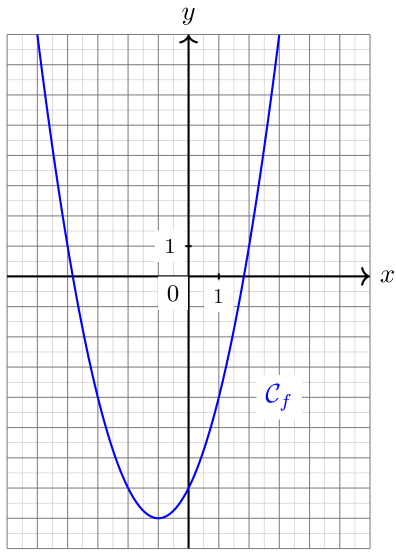
des deux points précédents nous déduisons que $M^{'}$ est le symétrique de M par rapport à (OJ).

III "Résolution graphique" d'équation.

Pour conjecturer les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 7 = 3$ nous introduisons la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array}$$

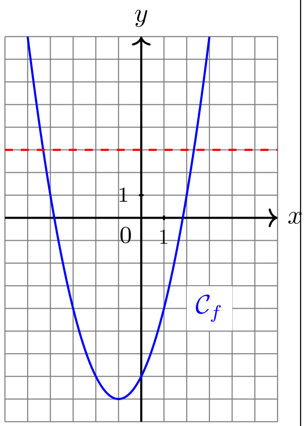
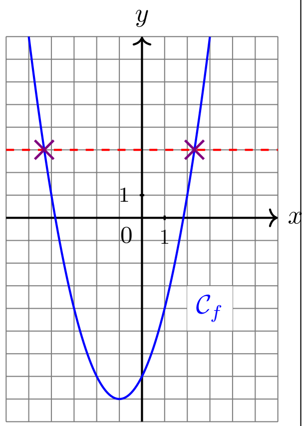
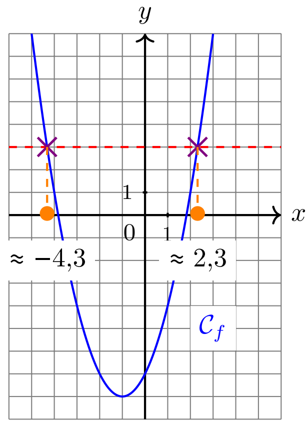
puis traçons sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ avec un logiciel :



Résoudre l'équation équivaut donc à rechercher les antécédents de 3 par la fonction f.

Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 3.

Concrètement pour les trouver il faut suivre les étapes suivantes.

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>Dessinez l'ordonnée 3.</td><td>Identifiez les points d'intersections.</td><td>Lire les abscisses correspondantes.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $x^2+2x-7=3$ est $\{-4{,}3\ ;\ 2{,}3\}$.

Remarques.

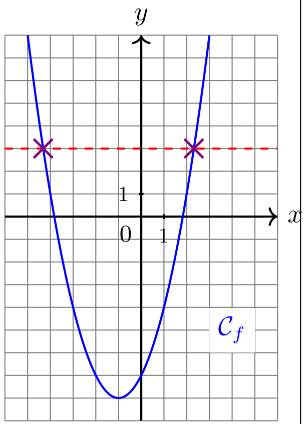
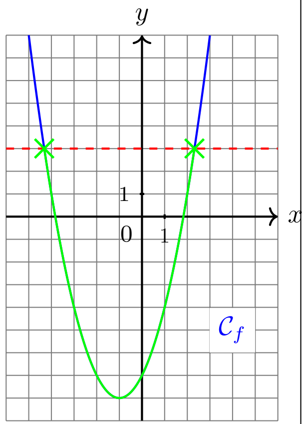
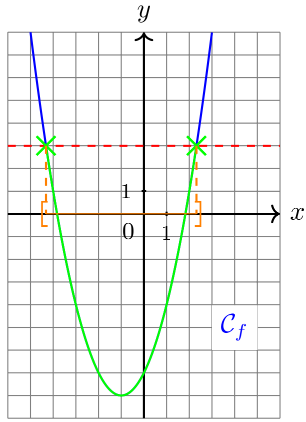
1. Inconvénients de la méthode :
   - Comme pour toute lecture graphique les résultats sont approximatifs (insuffisant en mathématique)
   - il s'agit d'une partie de la courbe et nous ne savons pas ce qu'il en est pour le reste de la courbe.

IV "Résolution graphique" d'inéquation : $f(x) \leq a$ (avec $a \in \mathbb{R}$).

Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2+2x-7 \leq 3$ nous introduisons encore la fonction $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2+2x-7 \end{array}$ puis traçons sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ avec un logiciel.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée plus petite ou égale à 3.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2	3
Dessinez l'ordonnée 3.	Identifiez les points de la courbe dont l'ordonnée est plus petite que 3.	Lire les abscisses correspondantes.
		

Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 3$ est $[-4{,}3 \ ; \ 2{,}3]$.

Remarquons enfin que si l'inégalité avait été stricte ($x^2 + 2x - 7 < 3$) l'ensemble des solutions eut été ouvert ($]-4{,}3 \ ; \ 2{,}3[$).

Exercice 10. ♥

Exercice 32 page 104 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations, réunion, ouverts, fermés.

Exercice 11. Application.

Exercice 31 page 104 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.

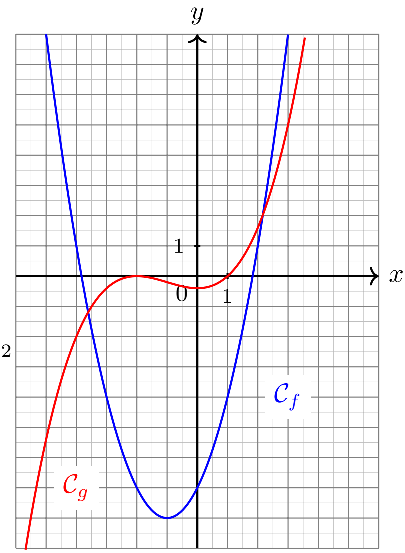
V "Résolution graphique" d'inéquation : $f(x) \leq g(x)$.

Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 0{,}1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2$ nous introduisons encore les fonctions

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array} \quad \text{et}$$

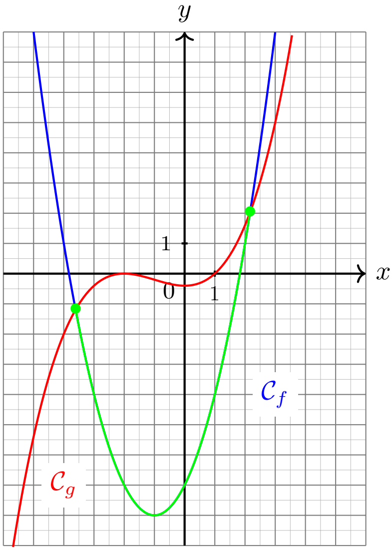
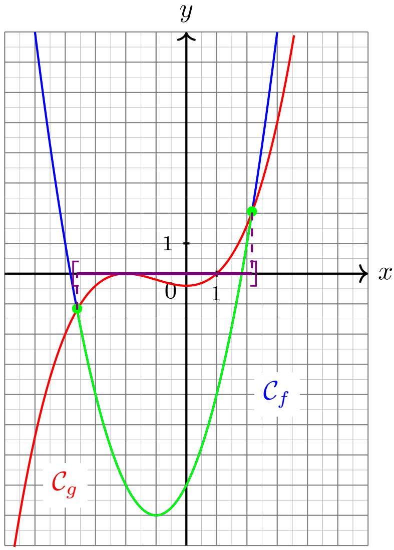
$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0{,}1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2 \end{array}$$

puis traçons leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ avec un logiciel.



Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés en dessous de ceux de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2
Identifiez les points de $\mathcal{C}_f$ situés en dessous de ceux de $\mathcal{C}_g$. 	Lire les abscisses correspondantes. 

Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 0{,}1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2$ est $[-3{,}6\ ;\ 2{,}2]$.

Exercice 12. Application.
Exercice 33 page 105 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.

Exercice 13. Application.
Exercice 35 page 105 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.