Intervalles.

Un *intervalle* est un sous-ensemble (une partie) "sans trous" de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Autrement dit c'est un ensemble de nombre qui entre deux quelconques des nombres qu'il contient, contient aussi tous les nombres qui sont entre ceux-ci.

Dans ce qui suit nous admettrons que l'ensemble de tous les nombres que nous appelons les nombres réels et notons $\mathbb{R}$, peut être représenté par un axe gradué que nous appellerons *la droite des réels*.

Avec cette représentation les intervalles peuvent être vus comme des droites, demi-droites ou segments.

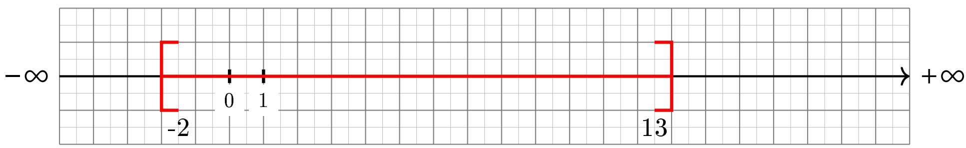
I Intervalles bornés.

Les intervalles bornés sont les ensembles qui contiennent tous les réels qui sont compris entre deux *bornes* (limites).

L'intervalle $[-2 \quad 13]$ (lisez « fermé en -2 et fermé en 13 ») désigne l'ensemble des nombres réels x compris entre -2 et 13. Ce sont donc tous les nombres x qui vérifient

$$-2 \leq x \leq 13$$

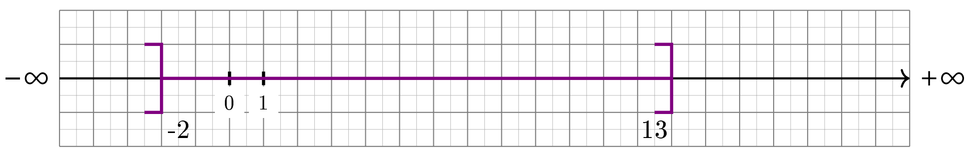
L'ensemble des nombres réels est représenté par une droite et l'intervalle $[-2\,;\,13]$ est alors représenté par un segment.



Il arrive souvent qu'en cherchant à optimiser la taille des intervalles il faille exclure les valeurs aux bornes. Ainsi pour désigner l'ensemble de tous les nombres compris entre -2 et 13 mais pas 2 nous noterons : $]-2\,;\,13]$ (lisez « ouvert en -2 et fermé en 13 »).

Ce qui correspond à tous le nombres x qui vérifient l'encadrement

$$-2 < x \leq 13$$



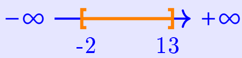
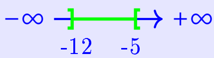
Remarques.

1. Pour dire qu'un nombre a est compris entre 3 et 4 nous écrirons : $a \in [3{,}4]$ et nous dirons que x *appartient* à l'intervalle $[3; 4]$.
2. Les bornes d'un intervalle sont toujours écrites dans l'ordre croissant.
3. L'*ensemble vide*, $\varnothing$, qui ne contient aucun élément est considéré comme un intervalle.

Exercice 1. ♥

Le tableau suivant comporte quatre façons, et donc quatre points de vus, pour parler d'une même notion.

Recopiez-le, puis complétez-le en prenant pour modèle la deuxième ligne.

Notation	Représentation	Inéquations (encadrement)	Description
$x \in [-2; 13]$		$-2 \leq x \leq 13$	Intervalle fermé en -2 et en 13.
$x \in [4\ ;\ 8[$	...	...	...
		...	...
...	...	$\pi \leq x < 8$	...
...	...	...	Intervalle ouvert en -6 et fermé en 2.

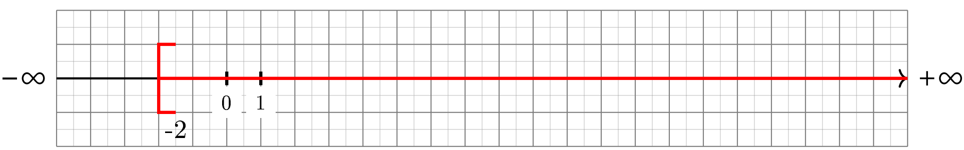
II Intervalles non bornés.

Les intervalles non bornés sont les intervalles qui contiennent tous les nombres plus grands ou plus petits qu'un nombre fixé.

L'intervalle $[-2 \quad +\infty[$ (lisez « fermé en -2 , plus l'infini ») désigne l'ensemble des nombres réels x supérieurs (ou égaux) à -2. Ce sont donc tous les nombres x qui vérifient

$$-2 \leq x$$

L'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$ est alors représenté par une demi-droite.

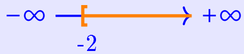
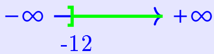


Remarques.

1. Le symbole ∞ désigne l'infini et n'est pas un nombre réel. C'est pourquoi le crochet est toujours ouvert du côté de ce symbole.

Exercice 2. ♥

Le tableau suivant comporte quatre façons, et donc quatre points de vus, différents pour parler d'une même notion.
Recopiez-le, puis complétez-le en prenant pour modèle la deuxième ligne.

Notation	Représentation	Inéquations (encadrement)	Description
$x \in [-2, +\infty[$		$-2 \leq x$	Intervalle fermé en -2, plus l'infini.
$x \in]-\infty;\ 8[$	...	...	...
		...	...
...	...	$x < \pi$	...
...	...	...	Intervalle moins l'infini, ouvert en -6.

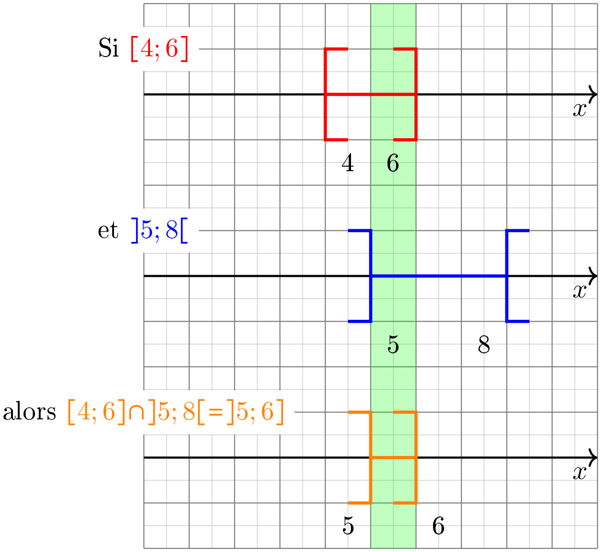
III Réunion et intersection.

Définition 1

L'*intersection* de deux ensembles A et B, qu'on note $A \cap B$, est l'ensemble de tous les éléments commun à l'ensemble A et l'ensemble B.

Ainsi 5,5 appartient à l'intersection des intervalles $[4;6]$ et $]5;8[$ puisque 5,5 appartient à chacun d'entre eux.

Pour déterminer l'intersection tout entière de $[4;6]$ et $]5;8[$ nous raisonnerons de façon géométrique comme ci-dessous :

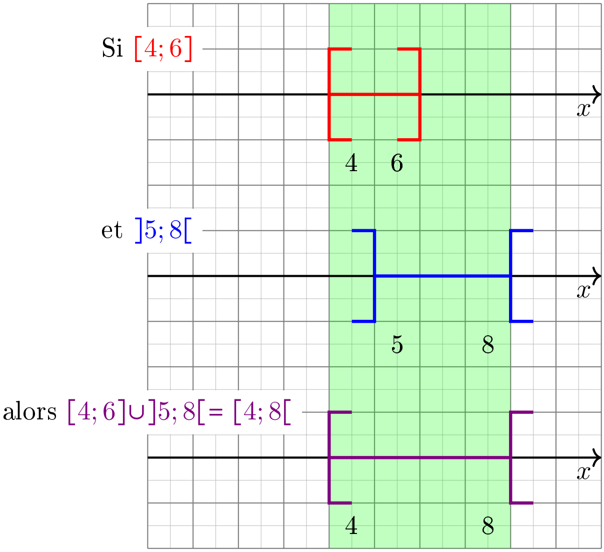


Définition 2

La *réunion* de deux ensembles A et B, qu'on note $A \cup B$, est l'ensemble de tous les éléments de l'ensemble A et l'ensemble B.

Ainsi 5,5 et 4,5 et 7 appartiennent à la réunion des intervalles $[4;6]$ et $]5;8[$ puisqu'ils appartiennent soit à l'un, soit à l'autre, soit aux deux intervalles.

Pour déterminer la réunion tout entière de $[4;6]$ et $]5;8[$ nous raisonnerons de façon géométrique comme ci-dessous :



Exercice.

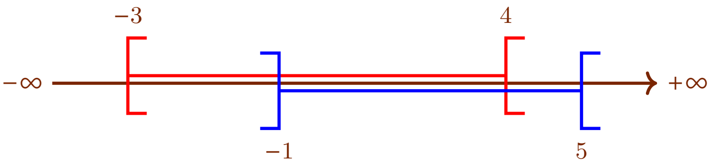
Exercice 3.

Simplifiez les écritures suivantes en justifiant par un schéma.

1. $[-3;4[\cup]-1;5[$
2. $]-1;3] \cap]2;4]$
3. $]-3;2] \cup [3;5]$
4. $]-13;7] \cap [7;17]$
5. $]-12;-11[\cap [-11;-3[$
6. $]-\infty;5] \cap [3;7[$
7. $]-\infty;0] \cup [0;+\infty[$

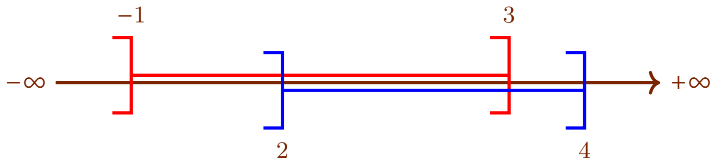
Correction exercice 3

1.



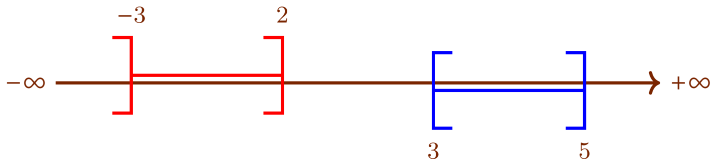
$$[-3;4[\cup]-1;5[= [-3;5[.$$

2.



$]-1;3]\cap]2;4]=]2;3]$.

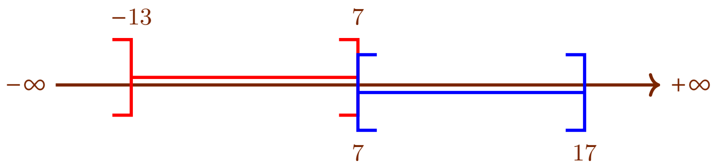
3.



Il n'y a pas de simplification de l'écriture de cette réunion d'ensembles.

$]-3;2]\cup[3;5]$ ne peut pas être écrit sous forme d'un intervalle.

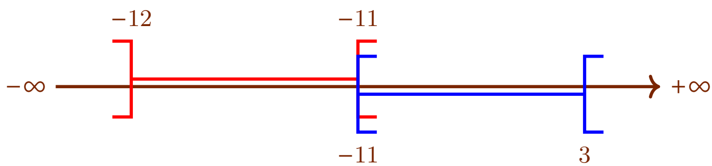
4.



$]-13;7]\cap[7;17]=\{7\}$.

Nous n'écrirons pas $[7;7]$ même si cela à du sens.

5.



$]-12;-11[\cap[-11;-3[=\varnothing$.

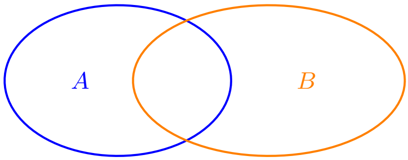
6. $[3;5]$.

7. $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Recherche.

Le cardinal d'un ensemble fini A, qu'on note $|A|$ ou $\text{Card}(A)$ ou $\#(A)$, désigne le nombre d'éléments dans cet ensemble.

En vous aidant du diagramme de Venn ci-dessous déterminez une égalité liant $|A|$, $|B|$, $|A \cap B|$ et $|A \cup B|$.



Exercice 5. Application.

Exercices 137 à 145 page 71 du manuel Indice.

Exercice 6. Application.

Exercices 161 à 165 page 72 du manuel Indice.

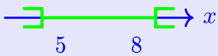
Exercice 7.

Le *complémentaire* d'un ensemble de nombres A est l'ensemble de tous les nombres qui ne sont pas dans A. Par exemple le complémentaire de $]-\infty;5[$ est l'ensemble $[5;+\infty[$.

Exercices 166 à 168 page 72 du manuel Indice.

Exercice 8. Application.

Complétez le tableau ci-dessous (les schémas ne doivent pas être à l'échelle).

Notation	Schéma	Inéquation(s)	Description
$x \in]-2\ ;\ +\infty[$			
			
		$-3 < x \leq 4$	
			Intervalle ouvert en -5 et fermé en 7.

Exercice 9. Application.

Simplifiez si possible l'écriture des ensembles ci-dessous en justifiant sinon récrivez l'expression proposée.

1. $I_1 =]-13; 4] \cap [3; 8[$
2. $I_2 =]-\infty; 5] \cap]3; 4[$
3. $I_3 =]-2; 2] \cup [3; 4]$