Équation produit-nul.

Nous ne savons jusqu'à présent résoudre que les équations linéaires du premier degré. Afin d'étendre cette compétence à des équations plus complexes nous essaieront d'écrire les équations sous forme d'équations produit.

I Produit nul de réels.

Proposition 1

Soient a et b deux nombres réels.

$$(a.b = 0) \iff (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

Remarques.

1. Il est parfois intéressant d'utiliser la négation de cette phrase : $a \cdot b \neq 0$ équivaut à
$$a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0$$

   Faire remarquer le lien avec les résultats trouvés avec le contraire d'une réunion ou d'une intersection en probabilité.

2. Ce résultat ne s'applique qu'aux nombres. Il n'est, par exemple, pas vrai pour des fonctions.

II Équation produit-nul

Mise en évidence : égalité à zéro puis factorisation.

Nous appellerons *équation produit-nul* une équation dont l'un des membres est un produit et l'autre 0.

Exercice 1.

2ieme didier mathx 2010 page 97 exercice 78

Identifiez (sans transformer les expressions) les équation produits.

1. $(x-1)(2x+3)=0$
2. $x^2(x+3)=0$
3. $4x^2+5x=0$
4. $(2x+3)(x+6)=1$
5. $(2x-5)(x+1)=0$
6. $(2x-5)(x+4)-1=0$

Correction exercice 1

3, 4 et 6 ne sont pas des équations produits car

* $4x^2+5x$ est une somme.
* $(2x+3)(x+6)=1$ n'est pas égale à 0.
* $(2x-5)(x+4)-1$ est une différence.

Exercice 2. ♥

Écrivez les équations suivantes sous forme d'une équation produit.

1. E_1 : $2x^2=3x$.
2. E_2 : $12x=6x^2+6$.
3. E_3 : $x^2=5$.
4. E_4 : $x^2=y^2$.
5. E_5 : $(2x+3)^2=(x-1)^2$.
6. E_6 : $(3x+1)(x-5)=5(5-x)$.

Correction exercice 2

1. Écrivons l'équation sous forme d'équation produit.

   Nous nous ramenons à une égalité à 0.

$$\begin{aligned}(E_1) &\Leftrightarrow 2x^2-3x=3x-3x\\ &\Leftrightarrow 2x^2-3x=0\end{aligned}$$

   Il faut à présent factoriser.

$$(E_1)\Leftrightarrow x(2x-3)=0$$

$$(E_1) \iff x(2x-3)=0$$

2.

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff 12x = 6x^2+6\\ &\iff 12x-12x = 6x^2+6-12x\\ &\iff 0 = 6x^2-12x+6\\ &\iff 0 = 6x^2-6\times 2x+6\times 1\\ &\iff 0 = 6(x^2-2x+1)\\ &\iff 0 = 6(x^2-2\times x\times 1+1^2)\\ &\iff 0 = 6(x-1)^2\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(E_3) &\iff x^2 = 5\\ &\iff x^2-5 = 5-5\\ &\iff x^2-5 = 0\\ &\iff x^2-\sqrt{5}^2 = 0\\ &\iff (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = 0\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(E_4) &\iff x^2 = y^2\\ &\iff x^2-y^2 = y^2-y^2\\ &\iff x^2-y^2 = 0\\ &\iff (x-y)(x+y) = 0\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}(E_5) &\iff (2x+3)^2 = (x-1)^2\\ &\iff (2x+3)^2-(x-1)^2 = (x-1)^2-(x-1)^2\\ &\iff (2x+3)^2-(x+1)^2 = 0\\ &\iff [(2x+3)-(x+1)][(2x+3)+(x+1)] = 0\\ &\iff (2x+3-x-1)(2x+3+x+1) = 0\\ &\iff (x+2)(3x+4) = 0\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}(E_6) &\iff (3x+1)(x-5) = 5(5-x)\\ &\iff (3x+1)(x-5)-5(5-x) = 5(5-x)-5(5-x)\\ &\iff (3x+1)(x-5)-5(5-x) = 0\\ &\iff (3x+1)(x-5)+5(x-5) = 0\\ &\iff [(3x+1)+5](x-5) = 0\\ &\iff [3x+6](x-5) = 0\\ &\iff 3(x+2)(x-5) = 0\end{aligned}$$

Résolution.

Pour résoudre une équation produit nous utiliserons la proposition vue précédemment.

Voyons ceci sur un exemple.

Résolvons l'équation (E) : $2(x+2)(-3x+4) = 0.$

(E) équivaut à $x+2=0$ ou $-3x+4=0$.
Or

$$\begin{aligned}x+2=0 &\iff x+2-2 = 0-2\\ &\iff x = -2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-3x+4=0 &\iff -3x+4-4 = 0-4\\ &\iff -3x = -4\\ &\iff \frac{-3x}{-3} = \frac{-4}{-3}\\ &\iff x = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

donc (E) équivaut à $x=-2$ ou $x=\frac{4}{3}$.

L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{-2; \frac{4}{3}\right\}$.

Exercice 3. ♥

Résolvez les équations produits (E_i) pour tous les entiers naturels i tels que $1 \leqslant i \leqslant 6$ obtenues à l'exercice 2.

Correction exercice 3

1. $$\begin{aligned} x(2x-3)=0 &\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad 2x-3=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad 2x=3 \\ &\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de E_1 est $\mathscr{S}=\left\{0; \frac{2}{3}\right\}$.

2. $$\begin{aligned} 6(x-1)^2=0 &\Leftrightarrow x-1=0 \quad \text{ou} \quad x-1=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de E_2 est $\mathscr{S}=\{1\}$.

3. Nous avons ici une démonstration algébrique d'un résultat déjà connu $x^2 = 25$ admet deux solutions : 5 et -5.

$$\begin{aligned} (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0 &\Leftrightarrow x-\sqrt{5}=0 \quad \text{ou} \quad x+\sqrt{5}=0 \\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{5} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de E_3 est $\mathscr{S}=\left\{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\right\}$.

4. $$(x-y)(x+y)=0 \Leftrightarrow x=y \quad \text{ou} \quad x=-y$$

Nous verrons plus tard que l'ensemble des solutions (qui est formé de couples (x,y)) peut être interprété comme les coordonnées de points formant deux droites.

5. $$\begin{aligned} (x+2)(3x+4)=0 &\Leftrightarrow x+2=0 \quad \text{ou} \quad 3x+4=0 \\ &\Leftrightarrow x=-2 \quad \text{ou} \quad 3x=-4 \\ &\Leftrightarrow x=-2 \quad \text{ou} \quad x=-\frac{4}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de E_5 est $\mathscr{S} = \left\{-2; -\frac{4}{3}\right\}$.

6.

$$\begin{aligned} 3(x+2)(x-5) = 0 &\iff x+2=0 \quad \text{ou} \quad x-5=0 \\ &\iff x=-2 \quad \text{ou} \quad x=5 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de E_6 est $\mathscr{S} = \{-2; 5\}$.

Exercice 4. Application.

2ieme didier mathx 2010 page 97 exercices 83 jusqu'à 87

Résolvez les équations suivantes.

1. $4x^2 = 3x$
2. $(2x-1)(x+3) = 0$
3. $3x(x-1) = 5(x-1)$
4. $2x+3 = x^2+3$
5. $(x-2)^2 = 0$
6. $(2x-1)(4-x) = 0$
7. $x + (x-2) = -1$
8. $x(x-2) = -1$
9. $(x+1)^2 - 16x^2 = 0$
10. $3x^3 + 2x^2 = 0$
11. $2x^3 = x^2$
12. $16x^2 = 24x$
13. $x(x+4) = -4$
14. $(x+1)^3 - (x+1)^2 = 0$
15. $4x^2 - 2x = 6(2x-1)$
16. $(x+2)^2 - 3x - 6 = 0$
17. $9x^2 - 4x = 2x - 1$
18. $(2x+1)^2 = 4x^2 - 1$
19. $4(x+1)^2 = 2(x+1)(2x-3)$
20. $x^4 - 16 = 0$

Correction exercice 4

1. $\mathcal{S} = \left\{0; \frac{3}{4}\right\}$.
2. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; -3\right\}$.
3. $\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{3}; 1\right\}$.
4. $\mathcal{S} = \{0; 2\}$.
5. $\mathcal{S} = \{2\}$.

6. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 4\right\}$.
7. Résolvons l'équation proposée.

   L'équation proposée ne fait intervenir ni carré ni plus grande puissance de x. C'est une équation linéaire du premier degré. L'équation produit-nul n'est pas utile. La méthode consiste à isoler l'inconnue x.

   Avant d'enlever des parenthèses nous vérifions
   Étape 1 qu'il n'y a d'exposant s'appliquant aux parenthèses,
   Étape 2 que les parenthèses ne sont multiplié par rien ni à droite ni à gauche,
   Étape 3 qu'il n'y a pas de signe moins devant les parenthèses.
   C'est bien le cas ici.

$$\begin{aligned} x + (x+2) = -1 &\iff x + x - 2 = -1 \\ &\iff 2x - 2 + 2 = -1 + 2 \\ &\iff 2x = 1 \\ &\iff \frac{2x}{2} \qquad = \frac{1}{2} \\ &= x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   L'ensemble des solution de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

8. Résolvons l'équation proposée.

   On se ramène à une équation nulle :

$$\begin{aligned} x(x+2) = -1 &\iff x(x+2) + 1 = -1 + 1 \\ &\iff x(x+2) + 1 = 0 \end{aligned}$$

   Nous essayons maintenant de faire un produit donc de factoriser mais il n'y a ni facteur commun ni identité remarquable en désespoir de cause développons :

$$\begin{aligned} x(x+2) = -1 &\iff x \times x + x \times 2 + 1 = 0 \\ &\iff x^2 + 2x + 1 = 0 \end{aligned}$$

   On recommence nos tentatives de factorisation : recherche d'un facteur commun ça ne donne rien, par contre l'identité remarquable ...

$$\begin{aligned} x(x+2) = -1 &\leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times 1 = 1^2 \\ &\iff (x+1)^2 = 0 \\ &\iff x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 1 = 0 \\ &\iff x + 1 = 0 \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{1\}$.

9. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}\right\}$.
10. Résolvons l'équation.

    L'équation est déjà une égalité à zéro. Il y a ici des facteurs communs.

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 = 0 &\iff 3 \times x \times x \times x + 2 \times x \times x = 0 \\ &\iff x^2(3x+2) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x + 2 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x = -2 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{0; -\frac{2}{3}\right\}$.

11. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 0\right\}$.
12. $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}; 0\right\}$.
13. $\mathcal{S} = \{-2\}$.
14. $\mathcal{S} = \{0; -1\}$.
15. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$.
16. $\mathcal{S} = \{-2; 1\}$.
17. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.
18. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
19. $\mathcal{S} = \{-1\}$.
20. $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$.

Exercice 5. Application.

Exercices page 91 du manuel Nathan Mathématiques 2014.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 + 1 = 0$.
2. $(3x - 2)(5x + 4) = 0$.
3. $x^2 - 2x = 0$.
4. $(x + 1)^2 = 0$.

Correction exercice 5

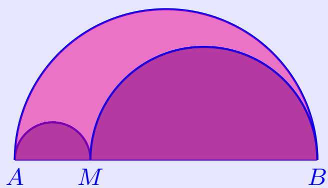
1. $\mathscr{S} = \varnothing$.
2. $\mathscr{S} = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{4}{5}\right\}$.
3. $\mathscr{S} = \{0; 2\}$.
4. $\mathscr{S} = \{-1\}$.

III Exercices.

Exercice 6.

2ieme didier mathx 2010 page 102 exercice 133

Soit M un point du segment $[AB]$. On considère les demi-disques de diamètres $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$ comme représentés ci-contre.



On donne $AB = 8$. Nous noterons $AM = 2x$. $f(x)$ désignera l'aire de la partie colorée en violet (*i.e.* les deux demi-disques de diamètres $[AM]$ et $[MB]$).

1. À quel intervalle appartient x ?
2. Démontrez que $f(x) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.
3. Les aires des deux parties colorées peuvent-elles être égales ?

Correction exercice 6

1. Déterminons l'intervalle dans lequel varie x.

   * Puisque $2x = AM$ et que AM est une longueur, nécessairement $x \geq 0$.
   * $M \in [AB]$ et $AB = 8$ donc $AM \leq 8$.
     D'où : $\frac{AM}{2} \leq \frac{8}{2}$.
     Autrement dit $x \leq 4$.

   Nous avons démontré que $x \in [0;4]$.

2. Démontrons que $f(x) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.

   * Le rayon du demi-disque de diamètre $[AM]$ est x (car $2x = AM$). Donc l'aire du demi-disque de diamètre $[AM]$ est

   $$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \times \pi x^2$$

   * Le rayon du demi-disque de diamètre $[MB]$ est

   $$\begin{aligned} \frac{1}{2}MB &= \frac{1}{2}(AB - AM) && \text{car } M \in [AB] \\ &= \frac{1}{2}(8 - 2x) \\ &= 4 - x \end{aligned}$$

   Donc l'aire du demi-disque de diamètre $[MB]$ est

   $$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \times \pi (4 - x)^2$$

   * Nous déduisons des deux points précédents

   $$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \\ &= \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{1}{2}\pi(4 - x)^2 \end{aligned}$$

   En factorisant :

   $$f(x) = \frac{1}{2}\pi\left[x^2 + (4 - x)^2\right]$$

   En développant l'identité remarquable :

   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\pi[x^2 + 16 - 8x + x^2] \\ &= \frac{1}{2}\pi(2x^2 - 8x + 16) \\ &= \pi(x^2 - 4x + 8) \end{aligned}$$

Nous avons bien : $f(x)\pi(x^2 - 4x + 8)$.

3. Dire que les deux parties colorées ont la même aire se traduit par

$$\frac{1}{2}\pi 4^2 - f(x) = f(x) \quad (E)$$

Résolvons l'équation (E).

$$\begin{aligned}
(E) &\Leftrightarrow 8\pi - 2f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow 8\pi - 2 \times \pi(x^2 - 4x + 8) = 0 \\
&\Leftrightarrow -2\pi\left[-4 + (x^2 - 4x + 8)\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow -2\pi\left[-4 + x^2 - 4x + 8\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow -2\pi(x^2 - 4x + 4) = 0 \\
&\Leftrightarrow -2\pi(x - 2)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 2
\end{aligned}$$

$2 \in [0; 4]$, nous pouvons donc conclure.

Les aires des parties colorées ne peuvent être égales que lorsque $x = 2$.

Exercice 7.

2ieme didier mathx 2010 page 98 exercice 93

Soit g la fonction définie par $g(x) = -2x^2 + 8x - 8$ sur $[0; +\infty[$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Démontrez que pour tout réel x, $g(x) = -2(x - 2)^2$
2. Déterminez le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et de l'axe des ordonnées.
3. Déterminez s'ils existent les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.
4. Déterminez les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ ayant pour ordonnée -8.

Correction exercice 7

1. Nous allons voir deux façons de démontrer le résultat.

   Démontrons que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -2(x-2)^2$.

   Démonstration en factorisant.

   Nous devons démontrer un résultat « pour tout x » ou « quelque soit » nous commençons par « fixer » cette variable :
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(x) &= -2x^2 + 8x - 8 \\ &= -2(x^2 - 4x + 4) \\ &= -2(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2) \\ &= -2(x-2)^2 \end{aligned}$$

   Nous avons démontré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -2(x-2)^2}$$

   Démontrons que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -2(x-2)^2$.

   Démonstration en développant le résultat donné dans l'énoncé.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} -2(x-2)^2 &= -2\left[x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2\right] \\ &= -2(x^2 - 4x + 4) \\ &= -2 \times x^2 + (-2) \times (-4)x + (-2) \times 4 \\ &= -2x^2 + 8x - 8 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

   Nous avons démontré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -2(x-2)^2}$$

2. Le préfixe « le » à propos du point d'intersection sous-entend qu'il est unique. Ceci découle du fait que, pour une fonction il y a unicité de l'image.
   Déterminer un point doit se comprendre dans le sens de trouver ses coordonnées.

   Déterminons $M(x_M; y_M)$ point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des ordonnées.

   Interprétons les conditions imposées à M avec un point de vue d'analyse.

Dire que M appartient à l'axe des ordonnées équivaut à dire que $x_M = 0$.
Dire que $M \in \mathcal{C}_g$ équivaut à dire que $y_M = g(x_M)$. Donc : $y_M = g(0) = -8$.

Le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0; 8)$.

3. Déterminons les points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.

Supposons qu'il existe un point $M(x_M; y_M)$ qui soit l'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.
M appartient à l'axe des abscisses donc $y_M = 0$.
M appartient à $\mathcal{C}_g$ donc $g(x_M) = 0$.
Résolvons cette dernière équation d'inconnue x_M.

$$\begin{aligned} g(x_M) = 0 &\iff -2(x-2)^2 = 0 \\ &\iff x - 2 = 0 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

$2 \in [0; +\infty[$ et $g(2) = 0$ donc c'est une solution qui convient bien.

L'unique point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(2; 0)$;

4. Déterminons les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ d'ordonnée -8.

En raisonnant comme précédemment cela revient à dire que nous cherchons les nombres $x \in [0 : +\infty[$ tels que : $g(x) = -8$.
Résolvons cette équation.

$$\begin{aligned} g(x) = -8 &\iff -2x^2 + 8x - 8 = -8 \\ &\iff -2x^2 + 8x = 0 \\ &\iff x(-2x+8) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } -2x + 8 = 0 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} -2x + 8 &\iff -2x + 8 - 8 = 0 - 8 \\ &\iff -2x = -8 \\ &\iff \frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2} \\ &\iff x = 4 \end{aligned}$$

donc, comme 0 et 4 sont bien dans l'ensemble $[0; +\infty[$ et $g(0) = g(4) = -8$, nous pouvons conclure.

Les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ ayant pour ordonnée -8 forment l'ensemble $\{0; 4\}$.

Exercice 8.

2ieme didier mathx 2010 page 98 exercice 95

Soit $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ quelque soit x réel.
Déterminez les zéros de la fonction f.

Correction exercice 8

Les *zéros d'une fonctions* sont les nombres x de son ensemble de définitions telles que : $f(x) = 0$. Ce sont les valeurs de x qui annulent f.

Il faut trouver les valeurs x telles que $f(x) = 0$.

Résolvons l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

$f(x) = 0$ équivaut successivement à

$$4x^3 - 24x^2 + 36x = 0$$

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 3 nous essayons de factoriser.

$$4x(x^2 - 6x + 9) = 0$$
$$4x(x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2) = 0$$
$$4x(x-3)^2 = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = 3$$

L'ensemble des zéros de f est $\{0; 3\}$.

Exercice 9.

2ieme didier mathx 2010 page 97 exercice 88

Proposez une équation ayant pour ensemble des solutions $\mathcal{S}$.

1. $\mathcal{S} = \{4\}$
2. $\mathcal{S} = \{2; 0\}$
3. $\mathcal{S} = \left\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right\}$
4. $\mathcal{S} = \left\{-2; \frac{2}{3}; 4\right\}$

Exercice 10.

2ieme didier mathx 2010 page 102 exercice 137

Deux nombres ont pour somme 314. De combien augmente leur produit si on ajoute 9 à chacun des deux ?

Correction exercice 10

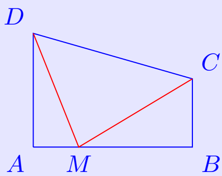
Ici il n'y a pas besoin de résoudre une équation, car il n'y a pas de condition à résoudre, on nous demande d'effectuer un calcul.

$x + y = 314$ et on souhaite calculer $(x+9)(y+9) - xy$ et on obtient 9×323.

Exercice 11.

Exercice avec uniquement du premier degré : révision.
Il s'agit du problème tiré de L'abbacci de Fibonacci.

Deux frères héritent d'un terrain ayant la forme d'un trapèze $ABCD$ rectangle en A représenté ci-dessous tel que $AD = 50$ m, $BC = 30$ m et $AB = 70$ m.



Ils souhaitent que l'un dispose du terrain triangulaire AMD, l'autre du terrain triangulaire BCM, la dernière partie étant revendue.

1. Comment placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que les deux frères disposent de la même surface ?
2. Comment placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que les deux frères disposent de surfaces triangulaires d'hypoténuses de même longueur ?

Correction exercice 11

1. Notons $x = AM$.

   Déterminons les valeurs de x pour lesquels $\mathscr{A}(AMD) = \mathscr{A}(MBC)$.

$$\mathscr{A}(AMD) = \mathscr{A}(MBC)$$

   équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}AM \times AD &= \frac{1}{2}MB \times BC \\
\frac{1}{2}x \times 50 &= \frac{1}{2}(70 - x) \times 30 \\
50x &= 30(70 - x) \\
80x &= 2100 \\
x &= \frac{2100}{80} \\
x &= 26{,}25
\end{aligned}$$

Pour résoudre une équation linéaire inutile d'avoir une équation produit-nul.

Il faut placer le point M de sorte que $AM = 26{,}25$ m.

2. Déterminons les valeurs de x pour lesquels $DM = MC$.

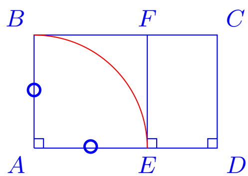
$$DM = MC$$

implique successivement :

$$\begin{aligned}
AD^2 + AM^2 &= MB^2 + BC^2 \\
50^2 + x^2 &= (70 - x)^2 + 30^2 \\
2500 + x^2 &= 70^2 - 2 \times 70 \times x + x^2 + 900 \\
2500 + x^2 &= 4900 - 140x + x^2 + 900 \\
140x &= 3300 \\
x &= -\frac{165}{7}
\end{aligned}$$

Exercice 12. Recherche.

Le rectangle d'or est un rectangle tel que, si on lui enlève un carré construit sur une largeur, on obtient un nouveau rectangle de même forme, c'est-à-dire dont le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est le même.
Ce rapport est alors appelé *nombre d'or* ou « divine proportion ». Il est noté φ.



1. Soit L la longueur de départ et l la largeur de départ.
   Calculez le rapport $\frac{DC}{ED}$ en fonction de L et l.
2. Montrez que
$$\frac{BC}{BA} = \frac{DC}{ED} \Leftrightarrow L(L - l) = l^2.$$
3. En déduire que le rapport $\frac{L}{l}$ est solution de l'équation
$$x^2 = x + 1$$

Le nombre d'or vérifie donc la propriété « si on l'augmente de 1, il est égale à son carré ».

4. Montrez que l'on a

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

5. En déduire la valeur exacte de φ puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 13.

2ieme nathan transmath 2010 exercice 81 page 58