Équation produit-nul.

Nous ne savons jusqu'à présent résoudre que les équations linéaires du premier degré. Afin d'étendre cette compétence à des équations plus complexes nous essaieront d'écrire les équations sous forme d'équations produit.

I Produit nul de réels.

Proposition 1

Soient a et b deux nombres réels.

$$(a.b = 0) \iff (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

Remarques.

1. Il est parfois intéressant d'utiliser la négation de cette phrase : $a \cdot b \neq 0$ équivaut à
$$a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0$$
2. Ce résultat ne s'applique qu'aux nombres. Il n'est, par exemple, pas vrai pour des fonctions.

II Équation produit-nul

Mise en évidence : égalité à zéro puis factorisation.

Nous appellerons *équation produit-nul* une équation dont l'un des membres est un produit et l'autre 0.

Exercice 1.

Identifiez (sans transformer les expressions) les équation produits.

1. $(x-1)(2x+3) = 0$
2. $x^2(x+3) = 0$
3. $4x^2 + 5x = 0$
4. $(2x+3)(x+6) = 1$
5. $(2x-5)(x+1) = 0$
6. $(2x-5)(x+4) - 1 = 0$

Exercice 2. ♥

Écrivez les équations suivantes sous forme d'une équation produit.

1. E_1 : $2x^2 = 3x$.
2. E_2 : $12x = 6x^2 + 6$.
3. E_3 : $x^2 = 5$.
4. E_4 : $x^2 = y^2$.
5. E_5 : $(2x+3)^2 = (x-1)^2$.
6. E_6 : $(3x+1)(x-5) = 5(5-x)$.

Résolution.

Pour résoudre une équation produit nous utiliserons la proposition vue précédemment.

Voyons ceci sur un exemple.

Résolvons l'équation (E) : $2(x+2)(-3x+4) = 0$.

♡

(E) équivaut à $x+2=0$ ou $-3x+4=0$.
Or

$$\begin{aligned} x+2=0 &\iff x+2-2=0-2 \\ &\iff x=-2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -3x+4=0 &\iff -3x+4-4=0-4 \\ &\iff -3x=-4 \\ &\iff \frac{-3x}{-3}=\frac{-4}{-3} \\ &\iff x=\frac{4}{3} \end{aligned}$$

donc (E) équivaut à $x=-2$ ou $x=\frac{4}{3}$.

L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{-2; \frac{4}{3}\right\}$.

Exercice 3. ♥

Résolvez les équations produits (E_i) pour tous les entiers naturels i tels que $1 \leqslant i \leqslant 6$ obtenues à l'exercice 2.

Exercice 4. Application.

Résolvez les équations suivantes.

1. $4x^2 = 3x$
2. $(2x-1)(x+3) = 0$
3. $3x(x-1) = 5(x-1)$
4. $2x+3 = x^2+3$
5. $(x-2)^2 = 0$
6. $(2x-1)(4-x) = 0$
7. $x+(x-2) = -1$
8. $x(x-2) = -1$
9. $(x+1)^2 - 16x^2 = 0$
10. $3x^3 + 2x^2 = 0$
11. $2x^3 = x^2$
12. $16x^2 = 24x$
13. $x(x+4) = -4$
14. $(x+1)^3 - (x+1)^2 = 0$
15. $4x^2 - 2x = 6(2x-1)$
16. $(x+2)^2 - 3x - 6 = 0$
17. $9x^2 - 4x = 2x - 1$
18. $(2x+1)^2 = 4x^2 - 1$
19. $4(x+1)^2 = 2(x+1)(2x-3)$
20. $x^4 - 16 = 0$

Exercice 5. Application.

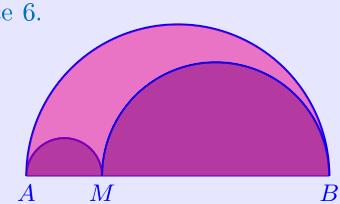
Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 + 1 = 0.$
2. $(3x-2)(5x+4) = 0.$
3. $x^2 - 2x = 0.$
4. $(x+1)^2 = 0.$

III Exercices.

Exercice 6.

Soit M un point du segment $[AB]$. On considère les demi-disques de diamètres $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$ comme représentés ci-contre.



On donne $AB = 8$. Nous noterons $AM = 2x$. $f(x)$ désignera l'aire de la partie colorée en violet (*i.e.* les deux demi-disques de diamètres $[AM]$ et $[MB]$).

1. À quel intervalle appartient x ?
2. Démontrez que $f(x) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.
3. Les aires des deux parties colorées peuvent-elles être égales ?

Exercice 7.

Soit g la fonction définie par $g(x) = -2x^2 + 8x - 8$ sur $[0; +\infty[$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Démontrez que pour tout réel x, $g(x) = -2(x-2)^2$
2. Déterminez le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et de l'axe des ordonnées.
3. Déterminez s'ils existent les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.
4. Déterminez les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ ayant pour ordonnée -8.

Exercice 8.

Soit $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ quelque soit x réel.
Déterminez les zéros de la fonction f.

Exercice 9.

Proposez une équation ayant pour ensemble des solutions $\mathcal{S}$.

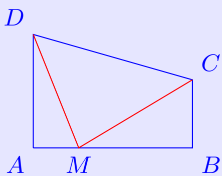
1. $\mathcal{S} = \{4\}$
2. $\mathcal{S} = \{2; 0\}$
3. $\mathcal{S} = \left\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right\}$
4. $\mathcal{S} = \left\{-2; \frac{2}{3}; 4\right\}$

Exercice 10.

Deux nombres ont pour somme 314. De combien augmente leur produit si on ajoute 9 à chacun des deux ?

Exercice 11.

Deux frères héritent d'un terrain ayant la forme d'un trapèze $ABCD$ rectangle en A représenté ci-dessous tel que $AD = 50$ m, $BC = 30$ m et $AB = 70$ m.

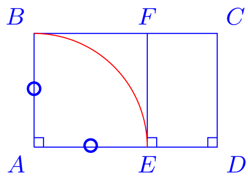


Ils souhaitent que l'un dispose du terrain triangulaire AMD, l'autre du terrain triangulaire BCM, la dernière partie étant revendue.

1. Comment placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que les deux frères disposent de la même surface ?
2. Comment placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que les deux frères disposent de surfaces triangulaires d'hypoténuses de même longueur ?

Exercice 12. Recherche.

Le rectangle d'or est un rectangle tel que, si on lui enlève un carré construit sur une largeur, on obtient un nouveau rectangle de même forme, c'est-à-dire dont le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est le même.
Ce rapport est alors appelé *nombre d'or* ou « divine proportion ». Il est noté φ.



1. Soit L la longueur de départ et l la largeur de départ.
   Calculez le rapport $\frac{DC}{ED}$ en fonction de L et l.
2. Montrez que
$$\frac{BC}{BA} = \frac{DC}{ED} \Leftrightarrow L(L-l) = l^2.$$
3. En déduire que le rapport $\frac{L}{l}$ est solution de l'équation
$$x^2 = x + 1$$
   Le nombre d'or vérifie donc la propriété « si on l'augmente de 1, il est égale à son carré ».
4. Montrez que l'on a
$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$
5. En déduire la valeur exacte de φ puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 13.