Équation produit-nul.

Nous ne savons jusqu'à présent résoudre que les équations linéaires du premier degré. Afin d'étendre cette compétence à des équations plus complexes nous essaieront d'écrire les équations sous forme d'équations produit.

I Produit nul de réels.

Proposition 1

Soient a et b deux nombres réels.

$$(a.b = 0) \Longleftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

Remarques.

1. Il est parfois intéressant d'utiliser la négation de cette phrase : $a \cdot b \neq 0$ équivaut à
$$a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0$$
2. Ce résultat ne s'applique qu'aux nombres. Il n'est, par exemple, pas vrai pour des fonctions.

II Équation produit-nul

Mise en évidence : égalité à zéro puis factorisation.

Nous appellerons *équation produit-nul* une équation dont l'un des membres est un produit et l'autre 0.

Exercice 1.

Identifiez (sans transformer les expressions) les équation produits.

1. $(x-1)(2x+3) = 0$
2. $x^2(x+3) = 0$
3. $4x^2 + 5x = 0$
4. $(2x+3)(x+6) = 1$
5. $(2x-5)(x+1) = 0$
6. $(2x-5)(x+4) - 1 = 0$

Correction exercice 1

3, 4 et 6 ne sont pas des équations produits car

* $4x^2 + 5x$ est une somme.
* $(2x+3)(x+6) = 1$ n'est pas égale à 0.

* $(2x-5)(x+4)-1$ est une différence.

Exercice 2. ♥

Écrivez les équations suivantes sous forme d'une équation produit.

1. E_1 : $2x^2 = 3x$.
2. E_2 : $12x = 6x^2 + 6$.
3. E_3 : $x^2 = 5$.
4. E_4 : $x^2 = y^2$.
5. E_5 : $(2x+3)^2 = (x-1)^2$.
6. E_6 : $(3x+1)(x-5) = 5(5-x)$.

Correction exercice 2

1. Écrivons l'équation sous forme d'équation produit.

   Nous nous ramenons à une égalité à 0.

$$\begin{aligned}(E_1) &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 3x - 3x \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0\end{aligned}$$

   Il faut à présent factoriser.

$$(E_1) \Leftrightarrow x(2x-3) = 0$$

$$\boxed{(E_1) \Leftrightarrow x(2x-3) = 0}$$

2.

$$\begin{aligned}(E_2) &\Leftrightarrow 12x = 6x^2 + 6 \\ &\Leftrightarrow 12x - 12x = 6x^2 + 6 - 12x \\ &\Leftrightarrow 0 = 6x^2 - 12x + 6 \\ &\Leftrightarrow 0 = 6x^2 - 6 \times 2x + 6 \times 1 \\ &\Leftrightarrow 0 = 6(x^2 - 2x + 1) \\ &\Leftrightarrow 0 = 6(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) \\ &\Leftrightarrow 0 = 6(x-1)^2\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(E_3) &\iff x^2 = 5\\ &\iff x^2 - 5 = 5 - 5\\ &\iff x^2 - 5 = 0\\ &\iff x^2 - \sqrt{5}^2 = 0\\ &\iff (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(E_4) &\iff x^2 = y^2\\ &\iff x^2 - y^2 = y^2 - y^2\\ &\iff x^2 - y^2 = 0\\ &\iff (x - y)(x + y) = 0\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}(E_5) &\iff (2x + 3)^2 = (x - 1)^2\\ &\iff (2x + 3)^2 - (x - 1)^2 = (x - 1)^2 - (x - 1)^2\\ &\iff (2x + 3)^2 - (x - 1)^2 = 0\\ &\iff [(2x + 3) - (x - 1)][(2x + 3) + (x - 1)] = 0\\ &\iff (2x + 3 - x + 1)(2x + 3 + x - 1) = 0\\ &\iff (x + 4)(3x + 2) = 0\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}(E_6) &\iff (3x + 1)(x - 5) = 5(5 - x)\\ &\iff (3x + 1)(x - 5) - 5(5 - x) = 5(5 - x) - 5(5 - x)\\ &\iff (3x + 1)(x - 5) - 5(5 - x) = 0\\ &\iff (3x + 1)(x - 5) + 5(x - 5) = 0\\ &\iff [(3x + 1) + 5](x - 5) = 0\\ &\iff [3x + 6](x - 5) = 0\\ &\iff 3(x + 2)(x - 5) = 0\end{aligned}$$

Résolution.

Pour résoudre une équation produit nous utiliserons la proposition vue précédemment.

Voyons ceci sur un exemple.

Résolvons l'équation (E) : $\quad 2(x+2)(-3x+4)=0.$

(E) équivaut à $x+2=0$ ou $-3x+4=0$. ♡

Or

$$\begin{aligned} x+2=0 &\Longleftrightarrow x+2-2=0-2 \\ &\Longleftrightarrow x=-2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -3x+4=0 &\Longleftrightarrow -3x+4-4=0-4 \\ &\Longleftrightarrow -3x=-4 \\ &\Longleftrightarrow \frac{-3x}{-3}=\frac{-4}{-3} \\ &\Longleftrightarrow x=\frac{4}{3} \end{aligned}$$

donc (E) équivaut à $x=-2$ ou $x=\frac{4}{3}$.

L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{-2; \frac{4}{3}\right\}$.

Exercice 3. ♥

Résolvez les équations produits (E_i) pour tous les entiers naturels i tels que $1 \leqslant i \leqslant 6$ obtenues à l'exercice 2.

Correction exercice 3

1.

$$\begin{aligned} x(2x-3)=0 &\Longleftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad 2x-3=0 \\ &\Longleftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad 2x=3 \\ &\Longleftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de E_1 est $\mathscr{S}=\left\{0; \frac{2}{3}\right\}$.

2.

$$\begin{aligned} 6(x-1)^2 = 0 &\Longleftrightarrow x-1=0 \quad \text{ou} \quad x-1=0 \\ &\Longleftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de E_2 est $\mathscr{S} = \{1\}$.

3. Nous avons ici une démonstration algébrique d'un résultat déjà connu $x^2 = 25$ admet deux solutions : 5 et -5.

$$\begin{aligned} (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = 0 &\Longleftrightarrow x-\sqrt{5}=0 \quad \text{ou} \quad x+\sqrt{5}=0 \\ &\Longleftrightarrow x=\sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{5} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de E_3 est $\mathscr{S} = \left\{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\right\}$.

4.

$$(x-y)(x+y) = 0 \Longleftrightarrow x=y \quad \text{ou} \quad x=-y$$

Nous verrons plus tard que l'ensemble des solutions (qui est formé de couples (x,y)) peut être interprété comme les coordonnées de points formant deux droites.

5.

$$\begin{aligned} (x+4)(3x+2) = 0 &\Longleftrightarrow x+4=0 \quad \text{ou} \quad 3x+2=0 \\ &\Longleftrightarrow x=-4 \quad \text{ou} \quad 3x=-2 \\ &\Longleftrightarrow x=-4 \quad \text{ou} \quad x=-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de E_5 est $\mathscr{S} = \left\{-4; -\frac{2}{3}\right\}$.

6.

$$\begin{aligned} 3(x+2)(x-5) = 0 &\Longleftrightarrow x+2=0 \quad \text{ou} \quad x-5=0 \\ &\Longleftrightarrow x=-2 \quad \text{ou} \quad x=5 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de E_6 est $\mathscr{S} = \{-2; 5\}$.

Exercice 4. Application.

Résolvez les équations suivantes.

1. $4x^2 = 3x$
2. $(2x-1)(x+3) = 0$
3. $3x(x-1) = 5(x-1)$
4. $2x+3 = x^2+3$
5. $(x-2)^2 = 0$
6. $(2x-1)(4-x) = 0$
7. $x+(x-2) = -1$
8. $x(x-2) = -1$
9. $(x+1)^2 - 16x^2 = 0$
10. $3x^3 + 2x^2 = 0$
11. $2x^3 = x^2$
12. $16x^2 = 24x$
13. $x(x+4) = -4$
14. $(x+1)^3 - (x+1)^2 = 0$
15. $4x^2 - 2x = 6(2x-1)$
16. $(x+2)^2 - 3x - 6 = 0$
17. $9x^2 - 4x = 2x - 1$
18. $(2x+1)^2 = 4x^2 - 1$
19. $4(x+1)^2 = 2(x+1)(2x-3)$
20. $x^4 - 16 = 0$

Correction exercice 4

1. $\mathcal{S} = \left\{0; \frac{3}{4}\right\}$.
2. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; -3\right\}$.
3. $\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{3}; 1\right\}$.
4. $\mathcal{S} = \{0; 2\}$.
5. $\mathcal{S} = \{2\}$.
6. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 4\right\}$.
7. Résolvons l'équation proposée.

   L'équation proposée ne fait intervenir ni carré ni plus grande puissance de x. C'est une équation linéaire du premier degré. L'équation produit-nul n'est pas utile. La méthode consiste à isoler l'inconnue x.

   Avant d'enlever des parenthèses nous vérifions
   Étape 1 qu'il n'y a d'exposant s'appliquant aux parenthèses,
   Étape 2 que les parenthèses ne sont multiplié par rien ni à droite ni à gauche,
   Étape 3 qu'il n'y a pas de signe moins devant les parenthèses.
   C'est bien le cas ici.

$$\begin{aligned} x+(x+2) = -1 &\iff x + x - 2 = -1 \\ &\iff 2x - 2 + 2 = -1 + 2 \\ &\iff 2x = 1 \\ &\iff \frac{2x}{2} = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solution de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

8. Résolvons l'équation proposée.

On se ramène à une équation nulle :

$$\begin{aligned} x(x+2) = -1 &\Leftrightarrow x(x+2)+1 = -1+1 \\ &\Leftrightarrow x(x+2)+1 = 0 \end{aligned}$$

Nous essayons maintenant de faire un produit donc de factoriser mais il n'y a ni facteur commun ni identité remarquable en désespoir de cause développons :

$$\begin{aligned} x(x+2) = -1 &\Leftrightarrow x \times x + x \times 2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \end{aligned}$$

On recommence nos tentatives de factorisation : recherche d'un facteur commun ça ne donne rien, par contre l'identité remarquable ...

$$\begin{aligned} x(x+2) = -1 &\leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times 1 = 1^2 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{ou} \quad x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{1\}$.

9. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}\right\}$.
10. Résolvons l'équation.

L'équation est déjà une égalité à zéro. Il y a ici des facteurs communs.

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 = 0 &\Leftrightarrow 3 \times x \times x \times x + 2 \times x \times x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(3x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x = -2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{0; -\frac{2}{3}\right\}$.

11. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 0\right\}$.
12. $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}; 0\right\}$.
13. $\mathcal{S} = \{-2\}$.
14. $\mathcal{S} = \{0; -1\}$.
15. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$.
16. $\mathcal{S} = \{-2; 1\}$.
17. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.
18. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
19. $\mathcal{S} = \{-1\}$.
20. $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$.

Exercice 5. Application.

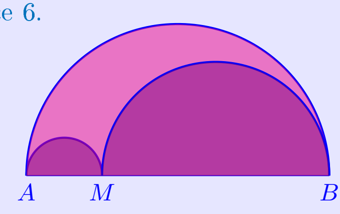
Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 + 1 = 0$.
2. $(3x - 2)(5x + 4) = 0$.
3. $x^2 - 2x = 0$.
4. $(x + 1)^2 = 0$.

III Exercices.

Exercice 6.

Soit M un point du segment $[AB]$. On considère les demi-disques de diamètres $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$ comme représentés ci-contre.



On donne $AB = 8$. Nous noterons $AM = 2x$. $f(x)$ désignera l'aire de la partie colorée en violet (*i.e.* les deux demi-disques de diamètres $[AM]$ et $[MB]$).

1. À quel intervalle appartient x ?
2. Démontrez que $f(x) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.
3. Les aires des deux parties colorées peuvent-elles être égales ?

Exercice 7.

Soit g la fonction définie par $g(x) = -2x^2 + 8x - 8$ sur $[0; +\infty[$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Démontrez que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $g(x) = -2(x-2)^2$
2. Déterminez le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et de l'axe des ordonnées.
3. Déterminez s'ils existent les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.
4. Déterminez les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ ayant pour ordonnée -8.

Correction exercice 7

1. Nous allons voir deux façons de démontrer le résultat.

   Démontrons que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -2(x-2)^2$.

   Démonstration en factorisant.

   Nous devons démontrer un résultat « pour tout x » ou « quelque soit » nous commençons par « fixer » cette variable :
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(x) &= -2x^2 + 8x - 8 \\ &= -2(x^2 - 4x + 4) \\ &= -2(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2) \\ &= -2(x-2)^2 \end{aligned}$$

   Nous avons démontré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -2(x-2)^2}$$

   Démontrons que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -2(x-2)^2$.

   Démonstration en développant le résultat donné dans l'énoncé.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} -2(x-2)^2 &= -2\left[x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2\right] \\ &= -2(x^2 - 4x + 4) \\ &= -2 \times x^2 + (-2) \times (-4)x + (-2) \times 4 \\ &= -2x^2 + 8x - 8 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Nous avons démontré que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -2(x-2)^2$$

2. Le préfixe « le » à propos du point d'intersection sous-entend qu'il est unique. Ceci découle du fait que, pour une fonction il y a unicité de l'image.
Déterminer un point doit se comprendre dans le sens de trouver ses coordonnées.

Déterminons $M(x_M; y_M)$ point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des ordonnées.

Interprétons les conditions imposées à M avec un point de vue d'analyse.

Dire que M appartient à l'axe des ordonnées équivaut à dire que $x_M = 0$.
Dire que $M \in \mathcal{C}_g$ équivaut à dire que $y_M = g(x_M)$. Donc : $y_M = g(0) = -8$.

Le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0; 8)$.

3. Déterminons les points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.

Supposons qu'il existe un point $M(x_M; y_M)$ qui soit l'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.
M appartient à l'axe des abscisses donc $y_M = 0$.
M appartient à $\mathcal{C}_g$ donc $g(x_M) = 0$.
Résolvons cette dernière équation d'inconnue x_M.

$$\begin{aligned} g(x_M) = 0 &\iff -2(x-2)^2 = 0 \\ &\iff x - 2 = 0 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

$2 \in [0; +\infty[$ et $g(2) = 0$ donc c'est une solution qui convient bien.

L'unique point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(2; 0)$;

4. Déterminons les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ d'ordonnée -8.

En raisonnant comme précédemment cela revient à dire que nous cherchons les nombres $x \in [0 : +\infty[$ tels que : $g(x) = -8$.
Résolvons cette équation.

$$\begin{aligned} g(x) = -8 &\iff -2x^2 + 8x - 8 = -8 \\ &\iff -2x^2 + 8x = 0 \\ &\iff x(-2x+8) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \ -2x + 8 = 0 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} -2x+8 &\iff -2x+8-8=0-8 \\ &\iff -2x=-8 \\ &\iff \frac{-2x}{-2}=\frac{-8}{-2} \\ &\iff x=4 \end{aligned}$$

donc, comme 0 et 4 sont bien dans l'ensemble $[0;+\infty[$ et $g(0)=g(4)=-8$, nous pouvons conclure.

Les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ ayant pour ordonnée -8 forment l'ensemble $\{0;4\}$.

Exercice 8.

Soit $f(x)=4x^3-24x^2+36x$ quelque soit x réel.
Déterminez les zéros de la fonction f.

Exercice 9.

Proposez une équation ayant pour ensemble des solutions $\mathcal{S}$.

1. $\mathcal{S}=\{4\}$
2. $\mathcal{S}=\{2;0\}$
3. $\mathcal{S}=\left\{\sqrt{2};-\sqrt{2}\right\}$
4. $\mathcal{S}=\left\{-2;\frac{2}{3};4\right\}$

Exercice 10.

Deux nombres ont pour somme 314. De combien augmente leur produit si on ajoute 9 à chacun des deux ?

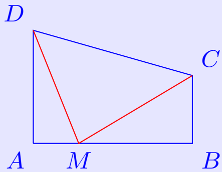
Correction exercice 10

Ici il n'y a pas besoin de résoudre une équation, car il n'y a pas de condition à résoudre, on nous demande d'effectuer un calcul.

$x+y=314$ et on souhaite calculer $(x+9)(y+9)-xy$ et on obtient 9×323.

Exercice 11.

Deux frères héritent d'un terrain ayant la forme d'un trapèze $ABCD$ rectangle en A représenté ci-dessous tel que $AD = 50$ m, $BC = 30$ m et $AB = 70$ m.

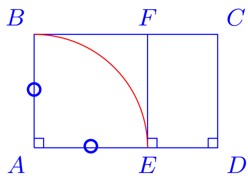


Ils souhaitent que l'un dispose du terrain triangulaire AMD, l'autre du terrain triangulaire BCM, la dernière partie étant revendue.

1. Comment placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que les deux frères disposent de la même surface ?
2. Comment placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que les deux frères disposent de surfaces triangulaires d'hypoténuses de même longueur ?

Exercice 12. Recherche.

Le rectangle d'or est un rectangle tel que, si on lui enlève un carré construit sur une largeur, on obtient un nouveau rectangle de même forme, c'est-à-dire dont le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est le même.
Ce rapport est alors appelé *nombre d'or* ou « divine proportion ». Il est noté φ.



1. Soit L la longueur de départ et l la largeur de départ.
   Calculez le rapport $\frac{DC}{ED}$ en fonction de L et l.
2. Montrez que
$$\frac{BC}{BA} = \frac{DC}{ED} \iff L(L-l) = l^2.$$
3. En déduire que le rapport $\frac{L}{l}$ est solution de l'équation
$$x^2 = x + 1$$
   Le nombre d'or vérifie donc la propriété « si on l'augmente de 1, il est égale à son carré ».
4. Montrez que l'on a
$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$
5. En déduire la valeur exacte de φ puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 13.