# Factoriser une expression polynomiale.

## I Généralités.

*Factoriser* c'est écrire une expression algébrique sous forme d'un produit.

Toute expression polynomiale est factorisable puisque : $P(X) = 1 \times P(X)$ (factorisation triviale).

La factorisation n'est pas évidente mais souvent astucieuse contrairement au développement. Il s'agit de reconnaître dans l'expression algébrique les formules classiques de la proposition suivante.

Proposition 1

Quelque soient les nombres $a$, $b$ et $c$ réels

1. $ab + ac = a(b + c)$ facteur commun.
2. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ identité remarquable.
3. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ identité remarquable.
4. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ identité remarquable.

Exercice 1.

Recopiez et complétez

1. $(2x + \dots)^2 = 4x^2 + \cdots + 9$
2. $(x - \dots)^2 = x^2 - 6x + \dots$
3. $(\cdots + 3)^2 = \cdots + 24t + 9$
4. $(x - \dots)^2 = x^2 - x + \dots$
5. $(x \dots)^2 = x^2 + \cdots + 16$
6. $(x \dots)^2 = x^2 - 8x + \dots$
7. $(\cdots + 3)^2 = \cdots + t + 9$
8. $(\cdots - 4)^2 = \cdots - 4x + \dots$

Il n'y a pas d'algorithme pour factoriser une expression mais vous pourrez essayer (sans garantie de réussite) dans l'ordre :

1. de chercher un facteur commun :
   * Identifier les termes de la somme (ou différence).
   * Écrire chacun des termes sous forme d'un produit.
   * Identifier un facteur commun à tous les termes.
2. d'utiliser une identité remarquable (s'il y a une expression avec du carré),
3. de factoriser une partie de l'expression pour faire apparaître un facteur commun ou une identité remarquable,

4. et enfin de développer en espérant pouvoir ensuite factoriser.

Exemples.

1. Factorisons $A(x) = 3x + 4xy$.
2. Factorisons $B(x) = x^2 - 7$.
3. Factorisons $C(x) = 3x^3 + (x-1)^2 - (x+1)^2$.

Exercice 2. ♥

Factorisez les expressions suivantes :

$$A = 2x + 2y$$
$$B = 7y - 7x$$
$$C = bc + 2b$$
$$D = 91z - 13t$$
$$E = xa + ay$$
$$F = x^2 + xy$$
$$G = a^3 + a^2$$
$$H = ab + a$$

$$I = (x-2)(x+3) + (5-x)(2-x)$$
$$J = (x-3)(x+1) - 3(3-x)^2$$
$$K = x^2 + 6x + 9$$
$$L = 25x^2 - 40x + 16$$
$$M = x^2 - 1$$
$$N = x^2 + 2x + 1$$
$$O = x^2 - 2x + 1$$
$$P = (x+1)(x+2) - 5(x^2 + 4x + 4)$$

## Exercice 3. Application.

Factorisez les expressions données.

1. $2x(x-1)+3x$
2. $(x+1)(x+2)+5(x+2)$
3. $3x^2+9x$
4. $x^2-6x$
5. $8x^2-5x$
6. $3x+4xy$
7. $3x^2+x$
8. $(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)$
9. $3x(x-5)-x$
10. $xy+xz$
11. $x^2(x+4)-2x(x+4)$
12. $(x-3)^2-2(x-3)(2x-1)$
13. $5x^2-6x$
14. $3xy+x$
15. $2(x+1)^2-3(x+1)$
16. $(x+1)^2+x+1$
17. $x^2+2x+1$
18. $(2x-5)^2-x^2$
19. $9x^2+12x+4$
20. $(2x-1)^2-(x-3)^2$

21. $(2x+1)^2-(1-x)^2$
22. $x^2-20x+100$
23. $25-(x+1)^2$
24. $4x^2+4+8x$
25. $16(x+1)^2-25x^2$
26. $16x^2-81$
27. $b^2-3b+\frac{9}{4}$
28. $(a-1)^2-2$
29. $x^2-4+(x-2)(x+1)$
30. $3x^2-12x+12$
31. $x^2+3x+(x+3)^2$
32. $(x+1)(x+2)-(3x+6)$
33. $2x(x+3)+4x+12$
34. $(x-3)(3x-4)-3x+4$
35. $xy-xz-y(y-z)$
36. $-x^2+8x-16$
37. $7x^2-14x$
38. $16x^2-81$
39. $2a^2b-b$
40. $4x^2-4x+1$

41. $2(x-1)^2+3x-3$
42. $2x^2+8x+8$
43. $x^2-16+(x-4)^2$
44. $5x^2-125$
45. $4x^2-12x+9$
46. $7x^2-28$
47. $(2x-3)^2-(5x+2)^2$
48. $(x-5)^2-2(x-5)(x-3)$
49. $2x^2+7x$
50. $x^2+26x+169$
51. $(9x^2-25)+(6x+10)$
52. $x^2-4x+4-(x-2)(7-x)$

# II Exercices.

**Exercice 4.**

Résolvez l'équation :

$$(E) \quad x^2 = 6x - 9.$$

**Exercice 5.**

Étant donnée la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2-1}{x-1} \end{array} \right.$ simplifiez son expression.

**Exercice 6.**

Soit $f$ la fonction définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2}}$$

Exprimez $f(x)$ de façon plus simple.

**Exercice 7.**

Sur un segment $[AE]$ est placé un point $M$ mobile. Un rectangle $ABCM$ et un triangle isocèle rectangle en $M$, $MED$, sont construits comme sur la figure ci-contre.

1. Calculez l'aire $f(x)$ de $MED$.
2. Calculez l'aire $g(x)$ de $ABCM$.
3. Trouvez pour quelle(s) valeur(s) de $x$ les aires du rectangle et du triangle sont égales.