Factoriser une expression polynomiale.

I Généralités.

Factoriser c'est écrire une expression algébrique sous forme d'un produit.

Toute expression polynomiale est factorisable puisque : $P(X) = 1 \times P(X)$ (factorisation triviale).

La factorisation est utile dans les situations suivantes :
— simplifier un quotient,
— résoudre des équations,
— et, nous le verrons bientôt, pour résoudre des inéquations.

La factorisation n'est pas évidente mais souvent astucieuse contrairement au développement. Il s'agit de reconnaître dans l'expression algébrique les formules classiques de la proposition suivante.

Proposition 1

Quelque soient les nombres a, b et c réels

1. $ab + ac = a(b + c)$ facteur commun.
2. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ identité remarquable.
3. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ identité remarquable.
4. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ identité remarquable.

Démonstration 1

Les trois dernières égalités se déduisent de la première qui est en fait la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Exercice 1.

Recopiez et complétez

1. $(2x + \dots)^2 = 4x^2 + \cdots + 9$
2. $(x - \dots)^2 = x^2 - 6x + \dots$
3. $(\cdots + 3)^2 = \cdots + 24t + 9$
4. $(x - \dots)^2 = x^2 - x + \dots$
5. $(x \dots)^2 = x^2 + \cdots + 16$
6. $(x \dots)^2 = x^2 - 8x + \dots$
7. $(\cdots + 3)^2 = \cdots + t + 9$
8. $(\cdots - 4)^2 = \cdots - 4x + \dots$

Correction exercice 1

1. $(2x+3)^2 = 4x^2+12x+9$
2. $(x-3)^2 = x^2-6x+9$
3. $(4t+3)^2 = 16t^2+24t+9$
4. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = x^2-x+\frac{1}{4}$
5. $(x+4)^2 = x^2+8x+16$
6. $(x-4)^2 = x^2-8x+16$
7. $\left(\frac{1}{6}t+3\right)^2 = \frac{1}{36}t^2+t+9$
8. $\left(\frac{1}{2}x-4\right)^2 = \frac{1}{4}x^2-4x+16$

Il n'y a pas d'algorithme pour factoriser une expression mais vous pourrez essayer (sans garantie de réussite) dans l'ordre :

1. de chercher un facteur commun :
   * Identifier les termes de la somme (ou différence).
   * Écrire chacun des termes sous forme d'un produit.
   * Identifier un facteur commun à tous les termes.
2. d'utiliser une identité remarquable (s'il y a une expression avec du carré),
3. de factoriser une partie de l'expression pour faire apparaître un facteur commun ou une identité remarquable,
4. et enfin de développer en espérant pouvoir ensuite factoriser.

Exemples.

1. Factorisons $A(x) = 3x + 4xy$.
   Ce n'est pas un produit (sinon c'est déjà factorisé) mais une somme de deux termes $3x$ et $4xy$. Première étapes nous recherchons si possible un facteur commun (ce qui implique qu'il y a des produits : $3x = 3\times x$ et $4xy = 4\times x\times y$) dans les deux termes $3x$ et $4xy$. Il y a un facteur commun c'est x.

$$\begin{aligned} A(x) &= 3x + 4xy \\ &= x(3+4y) \end{aligned}$$

2. Factorisons $B(x) = x^2 - 7$.
   C'est bien un somme de x^2 et de -7. Étape 1 : recherche d'un facteur commun, mais il n'y en a clairement pas entre x^2 et 7. Passons à la deuxième étape recherche d'une identité remarquable. Il y en a bien une ici : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$\begin{aligned} B(x) &= x^2 - 7 \\ &= x^2 - \sqrt{7}^2 \\ &= (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) \end{aligned}$$

3. Factorisons $C(x) = 3x^3 + (x-1)^2 - (x+1)^2$.
   Nous avons ici une somme de trois termes $3x^3$, $(x-1)^2$ et $(x+1)^2$. Il ne faut surtout pas développer ! C'est le contraire de notre objectif. Les deux premières étapes (facteur commun puis identité remarquable) échouent lamentablement. Passons à la troisième étape recherche d'une factorisation partielle.

   $$C(x) = 3x^3 + (x-1)^2 - (x+1)^2$$

   Nous reconnaissons une identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

   $$\begin{aligned} C(x) &= 3x^3 + [(x-1) - (x+1)] \times [(x-1) + (x+1)] \\ &= 3x^3 + (-2) \times 2x \\ &= 3x^3 - 4x \end{aligned}$$

   Nous reprenons toute la factorisation depuis le début et ici nous remarquons un facteur commun.

   $$C(x) = x(3x^2 - 4)$$

Exercice 2. ♥

Factorisez les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= 2x + 2y \\ B &= 7y - 7x \\ C &= bc + 2b \\ D &= 91z - 13t \\ E &= xa + ay \\ F &= x^2 + xy \\ G &= a^3 + a^2 \\ H &= ab + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= (x-2)(x+3) + (5-x)(2-x) \\ J &= (x-3)(x+1) - 3(3-x)^2 \\ K &= x^2 + 6x + 9 \\ L &= 25x^2 - 40x + 16 \\ M &= x^2 - 1 \\ N &= x^2 + 2x + 1 \\ O &= x^2 - 2x + 1 \\ P &= (x+1)(x+2) - 5(x^2 + 4x + 4) \end{aligned}$$

Correction exercice 2

$$A = 2(x+y)$$
$$B = 7(y-x)$$
$$C = b(c+2)$$
$$D = 13(7z-1)$$
$$E = a(x+y)$$
$$F = x(x+y)$$
$$G = a^2(a+1)$$
$$H = a(b+1)$$
$$I = (x-2)(2x-2)$$
$$J = (x-3)(-2x+4)$$
$$K = (x+3)^2$$
$$L = (5x-4)^2$$
$$M = (x-1)(x+1)$$
$$N = (x+1)^2$$
$$O = (x-1)^2$$
$$P = (x+1)(-4x-7)$$

Exercice 3. Application.

Factorisez les expressions données.

1. $2x(x-1)+3x$
2. $(x+1)(x+2)+5(x+2)$
3. $3x^2+9x$
4. x^2-6x
5. $8x^2-5x$
6. $3x+4xy$
7. $3x^2+x$
8. $(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)$
9. $3x(x-5)-x$
10. $xy+xz$
11. $x^2(x+4)-2x(x+4)$
12. $(x-3)^2-2(x-3)(2x-1)$
13. $5x^2-6x$
14. $3xy+x$
15. $2(x+1)^2-3(x+1)$
16. $(x+1)^2+x+1$
17. x^2+2x+1
18. $(2x-5)^2-x^2$
19. $9x^2+12x+4$
20. $(2x-1)^2-(x-3)^2$
21. $(2x+1)^2-(1-x)^2$
22. $x^2-20x+100$
23. $25-(x+1)^2$
24. $4x^2+4+8x$
25. $16(x+1)^2-25x^2$
26. $16x^2-81$
27. $b^2-3b+\frac{9}{4}$
28. $(a-1)^2-2$
29. $x^2-4+(x-2)(x+1)$
30. $3x^2-12x+12$
31. $x^2+3x+(x+3)^2$
32. $(x+1)(x+2)-(3x+6)$
33. $2x(x+3)+4x+12$
34. $(x-3)(3x-4)-3x+4$
35. $xy-xz-y(y-z)$
36. $-x^2+8x-16$
37. $7x^2-14x$
38. $16x^2-81$
39. $2a^2b-b$
40. $4x^2-4x+1$
41. $2(x-1)^2+3x-3$
42. $2x^2+8x+8$
43. $x^2-16+(x-4)^2$
44. $5x^2-125$
45. $4x^2-12x+9$
46. $7x^2-28$
47. $(2x-3)^2-(5x+2)^2$
48. $(x-5)^2-2(x-5)(x-3)$
49. $2x^2+7x$
50. $x^2+26x+169$
51. $(9x^2-25)+(6x+10)$
52. $x^2-4x+4-(x-2)(7-x)$

Correction exercice 3

1. $x(2x+1)$
2. $(x+2)(x+6)$
3. $3x(x+3)$
4. $x(x-6)$
5. $x(8x-5)$
6. $x(3+4y)$
7. $x(3x+1)$
8. $(2x+1)(x-2)$
9. $x(3x-16)$
10. $x(y+z)$
11. $x(x+4)(x-2)$
12. $(x-3)(-3x-1)$
13. $x(5x-6)$
14. $x(3y+1)$
15. $(x+1)(2x-1)$
16. $(x+1)(x+2)$
17. $(x+1)^2$
18. $(x-5)(3x-5)$
19. $(3x+2)^2$
20. $(x+2)(3x-4)$

21. $3x(x+2)$
22. $(x-10)^2$
23. $(-x+4)(x+6)$
24. $4(x+1)^2$
25. $(-x+4)(9x+4)$
26. $(4x-9)(4x+9)$
27. $\left(b-\frac{3}{2}\right)^2$
28. $(a-1-\sqrt{2})(a-1+\sqrt{2})$
29. $(x-2)(2x+3)$
30. $3(x-2)^2$
31. $(x+3)(2x+3)$
32. $(x-2)(x+2)$
33. $2(x+3)(x+2)$
34. $(3x-4)(x-4)$
35. $(x-y)(y-z)$
36. $-(x-4)^2$
37. $7x(x-2)$
38. $(4x-9)(4x+9)$
39. $(2a^2-1)b$
40. $4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

41. $(x-1)(2x+1)$
42. $2(x+2)^2$
43. $2x(x-4)$
44. $5(x-5)(x+5)$
45. $4(x-3)^2$
46. $7(x-2)(x+2)$
47. $(-3x-5)(7x-1)$
48. $(x-5)(-x+1)$
49. $x(2x+7)$
50. $(x+13)^2$
51. $3(3x+5)(x-1)$
   Correction : M. Illien
52. $(x-2)(2x-9)$
   Correction : M. Assenjee

II Exercices.

Exercice 4.

Résolvez l'équation :

$$(E) \quad x^2 = 6x - 9.$$

Correction exercice 4

Résolvons l'équation (E).

Très souvent pour résoudre une équation qui n'est pas linéaire en mathématique nous essayerons de ramener l'équation à une équation produit-nul (donc égale à 0).

Nous nous ramenons à une équation produit :

$$\begin{aligned}(E) &\iff x^2 - (6x-9) = 6x - 9 - (6x-9)\\ &\iff x^2 - 6x + 9 = 0\\ &\iff x^2 - 2\times 3\times x + 3^3 = 0\\ &\iff (x-3)^2 = 0\end{aligned}$$

Résolvons l'équation produit :

$$\begin{aligned}&\iff x - 3 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0\\ &\iff x = 3\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l' équation (E) est : $\mathcal{S} = \{3\}$.

Nous verrons plus tard dans l'année que pour résoudre une inéquation nous nous ramèneront à une inéquation produit en factorisant.

Exercice 5.

Étant donnée la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{x^2-1}{x-1}\end{array}\right.$ simplifiez son expression.

Correction exercice 5

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Pour simplifier une fraction il faut faire apparaître un facteur commun au numérateur et au dénominateur. Ils faut donc les factoriser. Ici on observe une identité remarquable.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{x-1} &= \frac{x^2-1^2}{x-1}\\ &= \frac{(x-1)\times(x+1)}{1\times(x-1)}\\ &= x+1\end{aligned}$$

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x^4-4x^3+4x^2}}$$

Exprimez $f(x)$ de façon plus simple.

Correction exercice 6

Simplifions l'expression de f.

Soit $x \in [2;+\infty[$.

$$\begin{aligned}x^4-4x^3+4x^2 &= x^2(x^2-4x+4)\\ &= x^2(x-2)^2\end{aligned}$$

Puisque $x \geq 2$

$$\sqrt{x^2(x-2)^2} = x(x-2).$$

Et donc

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{1+x(x-2)}\\ &= \sqrt{x^2-2x+1}\\ &= \sqrt{(x-1)^2}\end{aligned}$$

comme $x \geq 2$

$$f(x)=x-1$$

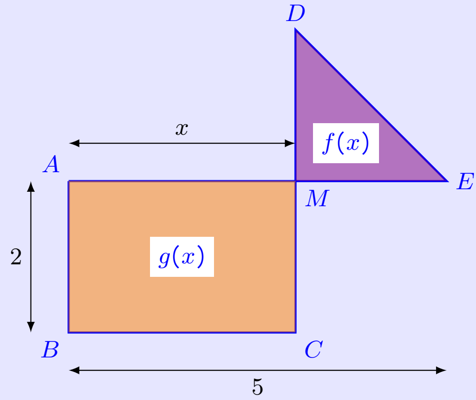
Quelque soit $x \in [2;+\infty[$,

$$f(x)=x-1.$$

Exercice 7.

Sur un segment $[AE]$ est placé un point M mobile. Un rectangle $ABCM$ et un triangle isocèle rectangle en M, MED, sont construits comme sur la figure ci-contre.

1. Calculez l'aire $f(x)$ de MED.
2. Calculez l'aire $g(x)$ de $ABCM$.
3. Trouvez pour quelle(s) valeur(s) de x les aires du rectangle et du triangle sont égales.



Correction exercice 7

1. Déterminons une formulation algébrique de f.

   Remarquons tout d'abord que

$$\left.\begin{array}{r} M \in [AE] \\ AE = 5 \\ x = AE \end{array}\right\} \Rightarrow x \in [0;5].$$

   Autrement dit le domaine de définition de f est $\mathscr{D}_f = [0;5]$.

   Soit $x \in [0;5]$.
   MED étant rectangle en M :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times ME \times MD$$

   Puisque MED est isocèle en M :

$$f(x) = \frac{1}{2} ME^2$$

   Enfin, puisque $M \in [AE]$:

$$f(x) = \frac{1}{2}(5 - x)^2$$

   Pour tout $x \in [0;5]$: $f(x) = \frac{1}{2}(x-5)^2$.

2. Déterminons une formulation algébrique de g.

   Soit $x \in [0;5]$.
   $ABCM$ est un rectangle donc

$$\begin{aligned} g(x) &= AB \times BC \\ &= 5 \times x \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0;5]$: $g(x) = 5x$

3. Je réinterprète la question en la traduisant par une équation :

   Résolvons dans $[0;5]$ l'équation : $f(x) = g(x)$.

   Soit $x \in [0;5]$.

$$f(x) = g(x)$$

équivaut successivement à

$$\frac{1}{2}(5-x)^2 = 2x$$

Un peu de méthode. Il ne s'agit visiblement pas d'une équation linéaire (un x est élevé au carré), il faut donc faire apparaître une équation produit-nul. Si on veut un produit il faut donc factoriser.

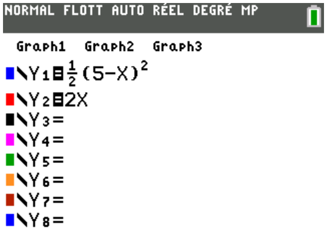
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(5-x)^2 - 2x &= 2x - 2x \\ \frac{1}{2}(5-x)^2 - 2x &= 0 \end{aligned}$$

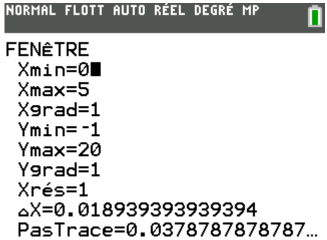
Rappelons que nous essayons d'abord de trouver un facteur commun, sinon une identité remarquable ou encore une factorisation partielle. Mais rien de tout ceci ne semble fonctionner. Developpons tout avant d'esayer à nouveau de factoriser.

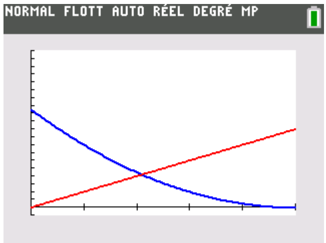
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(5^2 - 2 \times 5 \times x + x^2\right) - 2x &= 0 \\ \frac{1}{2}\left(25 - 10x + x^2\right) - 2x &= 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 7x + \frac{25}{2} &= 0 \end{aligned}$$

À partir de là nous bloquons. Nous ne voyons pas comment factoriser. Ceci dit nous pouvons néanmoins conjecturer l'ensemble des solutions avec la calculatrice.

Représentons graphiquement les courbes représentatives des fonctions f et g avec la calculatrice :







Il semblerait que les aires soient égalent pour une unique valeur de x qui est approximativement de 2,12.

La méthode générale de résolution de ce type d'équation (équation polynomiale de degré deux) est au programme de première.

III Ce qu'il faut retenir.

1. Cette leçon concerne surtout les élèves s'orientant vers une filière scientifique.
2. Connaître et savoir appliquer les formules de factorisation.
3. Connaître la démarche de recherche d'une factorisation.
4. Se souvenir de rechercher une factorisation pour obtenir une équation produit afin de résoudre une équation.