Développer des expressions polynomiales.

I Les polynômes.

Avertissement : c'est hors programme mais c'est pertinent pour pouvoir parler des objets. De plus les polynômes sont d'un certain point de vue les lettres d'un alphabet qui permet d'exprimer, d'analyser de nombreuses autres fonctions.

Les monômes sont des expressions algébriques formées du produit d'un *coefficient a* réel par une puissance d'une *indéterminée* $\mathbf{X}$: $a\mathbf{X}^n$.

Exemples de monômes : $4\mathbf{X}^0 = 4$, $-3\mathbf{X}^1 = -3\mathbf{X}$, $\pi\mathbf{X}^2$, $12{,}5\mathbf{X}^7$ et $0\mathbf{X} = 0$

L'exposant de $\mathbf{X}$ est appelé le *degré* du monôme. Par exemple : $-3\mathbf{X}$ est de degré 1 , $\pi\mathbf{X}^2$, est de degré 2 , $12{,}5\mathbf{X}^7$ est de degré 7 , 4 est de degré 0 et $0\mathbf{X} = 0$ est de degré $-\infty$.

Un *polynôme* est une somme (finie) de monômes.
Par exemple : $-3 + 8\mathbf{X}^2 + 4\mathbf{X} - 7\mathbf{X}^3 - 7\mathbf{X} + 10$ est un polynôme.

Les fonctions affines, linéaires, constante, carré et cube sont des fonctions polynomiales de degrés ....

On dit qu'un polynôme est *réduit* lorsque tout ses monômes sont de degrés distincts. Ainsi $3\mathbf{X}^2 - 12\mathbf{X}^5 + 2$ est sous forme réduite mais $5 + 7\mathbf{X} - 14\mathbf{X}^2 + 8\mathbf{X}$ n'est pas sous forme réduite car les monômes $7\mathbf{X}$ et $8\mathbf{X}$ sont semblables (même degré).

Exercice 1.

Donnez la forme réduite des polynômes suivants :

1. $-3\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 4\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2$
2. $7\mathbf{X}^{25} - 8\mathbf{X} + 3 + \mathbf{X} - 7\mathbf{X} + 12$
3. $3\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 4\mathbf{X} + 12$

Correction exercice 1

1. $-3\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 4\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2 = -3\mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2$
2. $7\mathbf{X}^{25} - 8\mathbf{X} + 3 + \mathbf{X} - 7\mathbf{X} + 12 = 7\mathbf{X}^{25} - 14\mathbf{X} + 15$
3. $3\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 4\mathbf{X} + 12 = 3\mathbf{X}^2 + 6\mathbf{X} + 12$

Le degré d'un polynôme réduit est le plus grand degré de ses monômes.

Un polynôme réduit est dit *ordonné* lorsque ses monômes sont rangés suivant les puissances décroissantes de l'indéterminée $\mathbf{X}$. Par exemple $-7\mathbf{X}^3 + \mathbf{X} - 3$ est ordonné alors que $\mathbf{X} - 7\mathbf{X}^2 + 2$ ne l'est pas.

Exercice 2.

Donnez la forme ordonnée et réduite des polynômes suivants :

1. $4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 14 + 3\mathbf{X}$
2. $23 + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2$
3. $3\mathbf{X} + 4\mathbf{X}^2 + 9\mathbf{X} + 9$

Correction exercice 2

1. $4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 14 + 3\mathbf{X} = 4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 10\mathbf{X} - 14$
2. $23 + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^2 + \mathbf{X} + 23$
3. $3\mathbf{X} + 4\mathbf{X}^2 + 9\mathbf{X} + 9 = 4\mathbf{X}^2 + 12\mathbf{X} + 9$

4ieme transmath page 224 exercices 42 à 44. Poursuivre à partir du 39.

Les polynômes ont ceci de merveilleux qu'ils peuvent s'appliquer à un très grand nombre d'objets $\mathbf{X}$ peut désigner des nombres bien sûr mais aussi d'autres polynômes, des fonctions, des transformations géométriques, des tableaux de nombres (matrices), etc.

II Développer.

Dans la suite les indéterminées, $\mathbf{X}$, seront notées comme des variables (x).

Développer, réduire et ordonner.

$x^2(3x-1)$ n'est, a priori, pas un polynôme puisque ce n'est pas une somme de monômes. Cependant en distribuant x^2 :

$$\begin{aligned} x^2(3x-1) &= x^2 3x - x^2 1 \\ &= x^2 3x^1 - x^2 \\ &= 3x^{2+1} - x^2 \\ &= 3x^3 - x^2 \end{aligned}$$

Ainsi $x^2(3x-1) = 3x^3 - x^2$ est bien un polynôme de degré 3.

Afin d'identifier chaque polynôme la convention est de l'écrire sous forme développée, réduite et ordonnée.

Définition 1

Deux polynômes sont dits *égaux* lorsqu'ils ont la même expression développée, réduite et ordonnée.

La boîte à outil pour développer.

Proposition 1

Les lettres a, b, c, d désignent des nombres, des expressions algébriques, des fonctions numériques etc.

(i) *Distributivité* de la multiplication sur l'addition : $a(b+c) = ab + ac$

(ii) Double distributivité : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

(iii) *Identités remarquables* :

. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Démonstration 1

(i) La distributivité n'est pas démontrable. C'est un axiome de la construction de la multiplication de l'ensemble des nombres réels.

(ii) On applique en deux temps la propriété de distributivité.

(iii) Les égalités se démontrent en partant du membre de gauche vers faisant :

. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ puis on utilise la double distributivité.

. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ puis on utilise la double distributivité.

. En utilisant la double distributivité.

III Exercice.

Rajouter un exercice d'application directe des formule qui serve d'exemple et qui permette de mettre les choses au clair pour ceux qui découvrent les formules.

Exercice 3. ♥

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions suivantes.

1. $A(x) = 4x(x+3)$.
2. $B(x) = (3+x)(2x-1)$.
3. $C(x) = (x+3)^2$.
4. $D(x) = (2x-4)^2$.
5. $E(x) = (-x+5)(-x-5)$.

Correction exercice 3

1. En utilisant la distributivité :

$$\begin{aligned} A(x) &= 4x \times x + 4x \times 3 \\ &= 4x^2 + 12x \end{aligned}$$

2. En utilisant la double distributivité :

$$\begin{aligned} B(x) &= (3+x)(2x+(-1)) \\ &= 3 \times 2x + 3 \times (-1) + x \times 2x + x \times (-1) \\ &= 6x - 3 + 2x^2 - x \\ &= 2x^2 + 6x - x - 3 \\ &= 2x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

3. Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Avec $a = x$ et $b = 3$.

$$\begin{aligned} C(x) &= x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

4. Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Avec $a = 2x$ et $b = 4$.

$$\begin{aligned} D(x) &= (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 4 + 4^2 \\ &= 2^2x^2 - 16x + 16 \\ &= 4x^2 - 16x + 16 \end{aligned}$$

5. Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Avec $a = -x$ et $b = 5$.

$$\begin{aligned} E(x) &= (-x)^2 - 5^2 \\ &= x^2 - 15 \end{aligned}$$

Exercice 4. Application.

Développez, réduisez puis ordonnez les expressions suivantes :

1. $A(x) = (x-1)(x-2)$
2. $B(x) = (x-2)(x^2+3) - (x+2)x^2$
3. $C(x) = (x+5)^2$
4. $D(x) = (x-5)^2$
5. $E(x) = (x+5)(x-5)$
6. $F(x) = (2x-7)^2$
7. $G(x) = (3+2x)^2$
8. $H(x) = (11-x)(11+x)$
9. $I(x) = \left(3x + \frac{5}{6}\right)^2$
10. $J(x) = \left(7x - \frac{1}{3}\right)^2$
11. $K(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right)$
12. $L(x) = (5-11x)^2$
13. $M(x) = (12+13x)^2$
14. $N(x) = (9x-4)(4+9x)$
15. $O(x) = \left(10x + \frac{1}{3}\right)^2$
16. $P(x) = (-x+1{,}2)^2$
17. $Q(x) = (0{,}7-x)(0{,}7+x)$
18. $R(x) = (11x-12)^2$

Exercice 5. Application.

4ieme transmath page 224 exercices 27 à 47. Poursuivre à partir du 39.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

1. $A(X) = (3X+4)(X-5)$,
2. $B(X) = 12(X-3) - 14(X+4)$,
3. $C(X) = 11(X-9) - 7(X-1)$,
4. $D(X) = 28X(3X^2 - 4X + 12)$,
5. $E(X) = 3{,}2X^2(5X^2 - 12X - 1{,}1)$,
6. $F(X) = -2X(3X - X + 2)$,
7. $G(X) = 5X(X-3)$,
8. $H(X) = 3X^2(2X^2 - X + 4)$,
9. $K(X) = (X+3)(X+4)$,

1. $L(X) = (2X+1)(X+2)$,
2. $M(X) = (3X-2)(2X+3)$,
3. $N(X) = (X-5)(X-2)$,
4. $P(X) = (2X-1)(4X+3)$,
5. $Q(X) = (2X-7)^2$,
6. $R(X) = (5X-2)(X+4)$,
7. $S(X) = (3X+1{,}5)(2X-3)$,
8. $T(X) = (5X-7)(0{,}5X-1{,}2)$,
9. $U(X) = (2X-1{,}1)(X+4)$,
10. $V(X) = (X-7)(X+7)$.

Correction exercice 5

1. $P_1(X) = 3X^2 - X - 20$
2. $P_2(X) = -2X - 92$
3. $P_3(X) = 4X - 92$
4. $P_4(X) = 54X^3 - 112X^2 + 336X$
5. $P_5(X) = 16X^4 - 38{,}4X^3 - 3{,}52X^2$
6. $P_7(X) = -4X^2 - 4X$
7. $P_8(X) = 5X^2 - 3X$
8. $P_9(X) = 6X^4 - 3X^3 + 12X^2$
9. $P_{10}(X) = X^2 + 7X + 12$
10. $P_{11}(X) = 2X^2 + 5X + 2$
11. $P_{12}(X) = 6X^2 + 5X - 6$
12. $P_{13}(X) = X^2 - 7X + 10$

Exercice 6. Application.

4ieme transmath page 224 exercices 27 à 47. Poursuivre à partir du 39.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

1. $A(x) = (2X - 3)^2$,
2. $B(X) = \left[(2X^2 - 2X + 3) - (2X^2 + 3)\right](5X^2 - 4X + 3)$,
3. $C(X) = (3X - 1)(5X - 2) + (X + 2)^2$,
4. $D(X) = (5X - 3)(3X + 1) - (2X - 4)(-X + 5)$,
5. $E(X) = (1{,}5X - 5)(1{,}5X + 5) - (X - 1)^2$,
6. $F(X) = (5X + 2)^2 - (X - 3)^2$,
7. $G(X) = (3X - 2)^2 - (5 - 4X)(4 - 6X)$,
8. $H(X) = (X - 1)(2X + 3) + (X - 1)(X + 2)$,
9. $I(X) = (2X - 5)(2X + 5)$,
10. $J(X) = (3X + 1)(7X - 2) + (X - 2)^2$,
11. $K(X) = (4X - 3)(3X + 2) - (2X + 5)(X - 3)$,
12. $L(X) = (1{,}5X - 2)(1{,}5X + 2) - (X + 3)^2$,
13. $M(X) = (3X - 2)^2 - (X - 4)^2$,
14. $N(X) = (3X + 1)^2 - (5 - 4X)(2 + 3X)$,
15. $P(X) = (X - 1)(2X + 2) + (X - 1)(2X + 2)$,
16. $Q(X) = (X + 1)(X - 3) + (X + 1)(3X + 1)$,
17. $R(X) = (2X - 4)(X - 1) - (X - 2)(3X + 2)$,
18. $S(X) = (X - 3)(X + 2) - (X - 2)(2X + 1)$,
19. $T(X) = (X + 1)(X - 4) - (2X + 8)(X + 5)$,
20. $U(X) = (3X - 2)^2 - (5X - 4)(2 + 3X)$,
21. $V(X) = (X + 2)(2X - 3) + (X - 1)(X + 2)$.

Exercice 7. ♥

Profiter de cet exercice pour parler des méthodes de démonstration de $A = B$, $A = C$, etc.

Il s'agit de l'exercice type à connaître dans cette leçon.

Démontrez les égalités proposées, valables pour tout x réel.

1. $(-2x+8)(x-7) = -2x^2 + 22x - 56$,
2. $-9 + 6x + 3x^2 = -3(1-x)(x+3)$,
3. $-3(x-3)^2 + 3 = -3(x-4)(x-2)$.

Correction exercice 7

♡

Exercice 8. Application.

2ieme nathan transmath 2010 page 82 exercices 66 à 68

Vérifiez que les trois formes proposées, A, B et C, correspondent à une même expression polynomiale.

1. $A(x) = (x-3)(x+5)$.
   $B(x) = x^2 + 2x - 15$.
   $C(x) = (x+1)^2 - 16$.
2. $A(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 6$.
   $B(x) = (x - 3\sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.
   $C(x) = (x - \sqrt{2})^2 - 8$
3. $A(x) = 2x^2 + 3x - 2$.
   $B(x) = (2x-1)(x+2)$.
   $C(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$.

Exercice 9.

2ieme didier mathx 2010 page 103 exercice 142
Raisonnement par l'absurde.

Est-il possible que $x^2 - 3x + 4$ s'écrive pour tout x réel comme un produit de la forme $(x+1)(ax+b)$ avec a et b réels ?

Correction exercice 9

Nous allons faire une démonstration par analyse-synthèse.

Notons $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Analyse.

Supposons que $f(x) = (x+1)(ax+b)$.

Comme

$$(x+1)(ax+b) = ax^2 + (a+b)x + b,$$

et donc

$$ax^2 + (a+b)x + ab = x^2 - 3x + 4.$$

L'écriture sous forme développée, réduite et ordonnée étant unique, nous identifions les coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -3 \\ b = 4 \end{cases}$$

Et donc : $a = 1$, $b = -4$ et $b = 4$.

Synthèse.

Les seules solutions possibles doivent vérifier à la fois $ab = 1 \times (-4) = -4$ mais aussi $b = 4$ ce qui est impossible donc il n'y a pas de solution au problème.

Il n'est donc pas possible de trouver une écriture de $x^2 - 3x + 4$ de la forme $(x+1)(ax+b)$.

Démonstration plus brève. Raisonnement par l'absurde.

Raisonnons par l'absurde en supposant que nous avons trouvé des nombres a et b tels que pour tout x réel $x^2 - 3x + 4 = (x+1)(ax+b)$.

Alors en particulier, pour $x = -1$, $8 = 0$, ce qui est impossible.

Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il n'est pas possible de trouver a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x + 4 = (x+1)(ax+b)$.

Exercice 10. Recherche.

2ieme didier mathx 2010 page 103 exercice 141

Algorithme de Horner.

À la calculatrice, une instruction $x \wedge 3$ compte pour 2 multiplications : $x \wedge 3 = x \times x \times x$.

1. **Premier exemple.**

   Soit $f(x) = x^2 + 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$ (forme A).

   (a) Vérifiez que $f(x) = 3 + x(x+4)$ pour tout x réel (forme H).

(b) Combien d'opérations sont effectuées avec la forme A ? avec la forme H ?

(c) On programme le calcul de $f(x)$ pour x variant de 0 à 2 avec un pas de 0,1. Combien d'opérations sont nécessaires avec chacune des deux formes ?

2. **Deuxième exemple.**
   Reprendre les questions a, b et c de la question 1 pour $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ (forme A) et $f(x) = -1 + x(4 + x(-3 + x(2 + x)))$ (forme H).
3. **Troisième exemple.**
   Soit $f(x) = 4x^7 + 2x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.
   (a) Proposer la forme H associée.
   (b) Reprendre les questions 1(b) et 1(c).
4. Quel est le gain obtenu en nombre d'opérations pour $f(x) = x^{50} + x^{49} + x^{48} + \cdots + x^2 + x + 1$?
   On pourra programmer un algorithme pour effectuer un calcul de ce gain.

Correction exercice 10

Cette méthode qui permet d'économiser les calculs et donc d'accélérer les programme informatiques est appelé l'*algorithme de Hörner*.

Exercice 11. Recherche.

Soit x un nombre réel différent de 1, démontrez que

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1 - x^5}{1 - x}.$$

Correction exercice 11

Il est possible d'utiliser le produit en croix.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Démontrer :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

équivaut à démontrer :

$$\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)(1 - x) = \frac{1 - x^5}{1 - x}(1 - x)$$

Or :

$$\begin{aligned}
&\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)(1 - x) \\
&= 1\times x^4 + 1\times x^3 + 1\times x^2 + 1\times x + 1\times 1 - x\times x^4 + x\times x^3 - x\times x^2 - x\times x - x\times 1 \\
&= 1 - x^5
\end{aligned}$$

IV Ce qu'il faut retenir.

1. Présenter une expression polynomiale sous forme développée, réduite et ordonnée.
2. Les méthodes, techniques pour développer : distributivité, double distributivité, identités remarquables.