Développer des expressions polynomiales.

I Les polynômes.

Les monômes sont des expressions algébriques formées du produit d'un *coefficient a* réel par une puissance d'une *indéterminée* $\mathbf{X}$: $a\mathbf{X}^n$.

Exemples de monômes : $4\mathbf{X}^0 = 4$, $-3\mathbf{X}^1 = -3\mathbf{X}$, $\pi\mathbf{X}^2$, $12{,}5\mathbf{X}^7$ et $0\mathbf{X} = 0$

L'exposant de $\mathbf{X}$ est appelé le *degré* du monôme. Par exemple : $-3\mathbf{X}$ est de degré 1 , $\pi\mathbf{X}^2$, est de degré 2 , $12{,}5\mathbf{X}^7$ est de degré 7 , 4 est de degré 0 et $0\mathbf{X} = 0$ est de degré $-\infty$.

Un *polynôme* est une somme (finie) de monômes.
Par exemple : $-3 + 8\mathbf{X}^2 + 4\mathbf{X} - 7\mathbf{X}^3 - 7\mathbf{X} + 10$ est un polynôme.

On dit qu'un polynôme est *réduit* lorsque tout ses monômes sont de degrés distincts. Ainsi $3\mathbf{X}^2 - 12\mathbf{X}^5 + 2$ est sous forme réduite mais $5 + 7\mathbf{X} - 14\mathbf{X}^2 + 8\mathbf{X}$ n'est pas sous forme réduite car les monômes $7\mathbf{X}$ et $8\mathbf{X}$ sont semblables (même degré).

Exercice 1.

Donnez la forme réduite des polynômes suivants :

1. $-3\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 4\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2$
2. $7\mathbf{X}^{25} - 8\mathbf{X} + 3 + \mathbf{X} - 7\mathbf{X} + 12$
3. $3\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 4\mathbf{X} + 12$

Le degré d'un polynôme réduit est le plus grand degré de ses monômes.

Un polynôme réduit est dit *ordonné* lorsque ses monômes sont rangés suivant les puissances décroissantes de l'indéterminée $\mathbf{X}$. Par exemple $-7\mathbf{X}^3 + \mathbf{X} - 3$ est ordonné alors que $\mathbf{X} - 7\mathbf{X}^2 + 2$ ne l'est pas.

Exercice 2.

Donnez la forme ordonnée et réduite des polynômes suivants :

1. $4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 14 + 3\mathbf{X}$
2. $23 + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2$
3. $3\mathbf{X} + 4\mathbf{X}^2 + 9\mathbf{X} + 9$

II Développer.

Dans la suite les indéterminées, $\mathbf{X}$, seront notées comme des variables (x).

Développer, réduire et ordonner.

$x^2(3x-1)$ n'est, a priori, pas un polynôme puisque ce n'est pas une somme de monômes. Cependant en distribuant x^2 :

$$\begin{aligned} x^2(3x-1) &= x^2 3x - x^2 1 \\ &= x^2 3x^1 - x^2 \\ &= 3x^{2+1} - x^2 \\ &= 3x^3 - x^2 \end{aligned}$$

Ainsi $x^2(3x-1) = 3x^3 - x^2$ est bien un polynôme de degré 3.

Afin d'identifier chaque polynôme la convention est de l'écrire sous forme développée, réduite et ordonnée.

Définition 1

Deux polynômes sont dits *égaux* lorsqu'ils ont la même expression développée, réduite et ordonnée.

La boîte à outil pour développer.

Proposition 1

Les lettres a, b, c, d désignent des nombres, des expressions algébriques, des fonctions numériques etc.

(i) *Distributivité* de la multiplication sur l'addition : $a(b+c) = ab + ac$

(ii) Double distributivité : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

(iii) *Identités remarquables* :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

III Exercice.

Exercice 3. ♥

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions suivantes.

1. $A(x) = 4x(x+3)$.
2. $B(x) = (3+x)(2x-1)$.
3. $C(x) = (x+3)^2$.
4. $D(x) = (2x-4)^2$.
5. $E(x) = (-x+5)(-x-5)$.

Exercice 4. Application.

Développez, réduisez puis ordonnez les expressions suivantes :

1. $A(x) = (x-1)(x-2)$
2. $B(x) = (x-2)(x^2+3) - (x+2)x^2$
3. $C(x) = (x+5)^2$
4. $D(x) = (x-5)^2$
5. $E(x) = (x+5)(x-5)$
6. $F(x) = (2x-7)^2$
7. $G(x) = (3+2x)^2$
8. $H(x) = (11-x)(11+x)$
9. $I(x) = \left(3x + \frac{5}{6}\right)^2$
10. $J(x) = \left(7x - \frac{1}{3}\right)^2$
11. $K(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right)$
12. $L(x) = (5-11x)^2$
13. $M(x) = (12+13x)^2$
14. $N(x) = (9x-4)(4+9x)$
15. $O(x) = \left(10x + \frac{1}{3}\right)^2$
16. $P(x) = (-x+1{,}2)^2$
17. $Q(x) = (0{,}7-x)(0{,}7+x)$
18. $R(x) = (11x-12)^2$

Exercice 5. Application.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

1. $A(X) = (3X+4)(X-5)$,
2. $B(X) = 12(X-3) - 14(X+4)$,
3. $C(X) = 11(X-9) - 7(X-1)$,
4. $D(X) = 28X(3X^2 - 4X + 12)$,
5. $E(X) = 3{,}2X^2(5X^2 - 12X - 1{,}1)$,
6. $F(X) = -2X(3X - X + 2)$,
7. $G(X) = 5X(X-3)$,
8. $H(X) = 3X^2(2X^2 - X + 4)$,
9. $K(X) = (X+3)(X+4)$,

1. $L(X) = (2X+1)(X+2)$,
2. $M(X) = (3X-2)(2X+3)$,
3. $N(X) = (X-5)(X-2)$,
4. $P(X) = (2X-1)(4X+3)$,
5. $Q(X) = (2X-7)^2$,
6. $R(X) = (5X-2)(X+4)$,
7. $S(X) = (3X+1{,}5)(2X-3)$,
8. $T(X) = (5X-7)(0{,}5X-1{,}2)$,
9. $U(X) = (2X-1{,}1)(X+4)$,
10. $V(X) = (X-7)(X+7)$.

Exercice 6. Application.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

1. $A(x) = (2X - 3)^2$,
2. $B(X) = \left[(2X^2 - 2X + 3) - (2X^2 + 3)\right](5X^2 - 4X + 3)$,
3. $C(X) = (3X - 1)(5X - 2) + (X + 2)^2$,
4. $D(X) = (5X - 3)(3X + 1) - (2X - 4)(-X + 5)$,
5. $E(X) = (1{,}5X - 5)(1{,}5X + 5) - (X - 1)^2$,
6. $F(X) = (5X + 2)^2 - (X - 3)^2$,
7. $G(X) = (3X - 2)^2 - (5 - 4X)(4 - 6X)$,
8. $H(X) = (X - 1)(2X + 3) + (X - 1)(X + 2)$,
9. $I(X) = (2X - 5)(2X + 5)$,
10. $J(X) = (3X + 1)(7X - 2) + (X - 2)^2$,
11. $K(X) = (4X - 3)(3X + 2) - (2X + 5)(X - 3)$,
12. $L(X) = (1{,}5X - 2)(1{,}5X + 2) - (X + 3)^2$,
13. $M(X) = (3X - 2)^2 - (X - 4)^2$,
14. $N(X) = (3X + 1)^2 - (5 - 4X)(2 + 3X)$,
15. $P(X) = (X - 1)(2X + 2) + (X - 1)(2X + 2)$,
16. $Q(X) = (X + 1)(X - 3) + (X + 1)(3X + 1)$,
17. $R(X) = (2X - 4)(X - 1) - (X - 2)(3X + 2)$,
18. $S(X) = (X - 3)(X + 2) - (X - 2)(2X + 1)$,
19. $T(X) = (X + 1)(X - 4) - (2X + 8)(X + 5)$,
20. $U(X) = (3X - 2)^2 - (5X - 4)(2 + 3X)$,
21. $V(X) = (X + 2)(2X - 3) + (X - 1)(X + 2)$.

Exercice 7. ♥

Démontrez les égalités proposées, valables pour tout x réel.

1. $(-2x + 8)(x - 7) = -2x^2 + 22x - 56$,
2. $-9 + 6x + 3x^2 = -3(1 - x)(x + 3)$,
3. $-3(x - 3)^2 + 3 = -3(x - 4)(x - 2)$.

Exercice 8. Application.

Vérifiez que les trois formes proposées, A, B et C, correspondent à une même expression polynomiale.

1. $A(x) = (x-3)(x+5)$.
   $B(x) = x^2 + 2x - 15$.
   $C(x) = (x+1)^2 - 16$.
2. $A(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 6$.
   $B(x) = (x - 3\sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.
   $C(x) = (x - \sqrt{2})^2 - 8$
3. $A(x) = 2x^2 + 3x - 2$.
   $B(x) = (2x-1)(x+2)$.
   $C(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$.

Exercice 9.

Est-il possible que $x^2 - 3x + 4$ s'écrive pour tout x réel comme un produit de la forme $(x+1)(ax+b)$ avec a et b réels ?

Exercice 10. Recherche.

À la calculatrice, une instruction $x \wedge 3$ compte pour 2 multiplications : $x \wedge 3 = x \times x \times x$.

1. **Premier exemple.**
   Soit $f(x) = x^2 + 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$ (forme A).
   (a) Vérifiez que $f(x) = 3 + x(x+4)$ pour tout x réel (forme H).
   (b) Combien d'opérations sont effectuées avec la forme A ? avec la forme H ?
   (c) On programme le calcul de $f(x)$ pour x variant de 0 à 2 avec un pas de 0,1. Combien d'opérations sont nécessaires avec chacune des deux formes ?
2. **Deuxième exemple.**
   Reprendre les questions a, b et c de la question 1 pour $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ (forme A) et $f(x) = -1 + x(4 + x(-3 + x(2 + x)))$ (forme H).
3. **Troisième exemple.**
   Soit $f(x) = 4x^7 + 2x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.
   (a) Proposer la forme H associée.
   (b) Reprendre les questions 1(b) et 1(c).
4. Quel est le gain obtenu en nombre d'opérations pour $f(x) = x^{50} + x^{49} + x^{48} + \cdots + x^2 + x + 1$?
   On pourra programmer un algorithme pour effectuer un calcul de ce gain.

Exercice 11. Recherche.

Soit x un nombre réel différent de 1, démontrez que

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1 - x^5}{1 - x}.$$