Les inéquations du premier degré.

I Généralités sur les inéquations.

Une inéquation est une inégalité qui peut être vraie ou fausse suivant les valeurs attribuées aux inconnues.

Résoudre une inéquation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'inéquation vraie.

Cette année les ensembles de solutions des inéquations seront souvent des intervalles ou des réunions d'intervalles.

Pour résoudre les inéquations nous regrouperont tous les termes d'un seul côté du signe d'inégalité afin de se ramener à une inégalité à 0 c'est-à-dire à une étude de signe.

II Modifications autorisées sur les inéquations.

Proposition 1

On ne modifie pas les résultats d'une inéquation en additionnant (respectivement en soustrayant) par un même nombre des deux côtés de l'inégalité.

Remarques.

1. Pour additionner ou soustraire les équations et les inéquations se manipulent de la même façon que les équations.

Exercice 1. ♥

Résolvez l'inéquation $x - 7 \geq 12$

Exercice 2. ♥

Trouvez tous les nombres x qui vérifient les deux inéquations suivantes (système de deux équations à une inconnue) :

$$\begin{cases} x + 7 \leq 12 \\ x - 5 \geq -17 \end{cases}$$

Proposition 2

On ne modifie pas les résultats d'une inéquation en multipliant (respectivement en divisant) par un même <u>nombre strictement positif</u> des deux côtés de l'inégalité.

Exercice 3. ♥
Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x \leq 12$.

Théorème 1

Pour ne pas modifier les solutions d'une inéquation en multipliant (respectivement en divisant) par un même nombre strictement négatif des deux côtés de l'inégalité il faut changer le sens de l'inégalité.

Exercice 4. ♥
Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-4x \geq 32$.

III Inéquation linéaire.

Définition 1

Une *inéquation linéaire* (ou inéquation polynomiale de degré 1) est une inéquation de la forme

$$ax + b < 0 \quad \text{ou} \quad ax + b \leq 0 \quad \text{ou} \quad ax + b > 0 \quad \text{ou} \quad ax + b \geq 0$$

avec a et b des nombres fixés et x un nombre variable.

Remarques.

1. Pour identifier l'inéquation du premier degré on regroupe tous les termes d'un même côté de l'inégalité. Autrement dit il faut se ramener à une inégalité à 0.
2. La résolution des inéquations du premier degré consiste à « isoler le x ». Supposons que a n'est pas nul et résolvons

$$ax + b \geq 0$$

équivaut successivement à

$$ax + b - b \geq 0 - b$$
$$ax \geq -b$$

Ce qui équivaut encore, si $a > 0$ à	Ce qui équivaut encore, si $a < 0$ à
$\dfrac{ax}{a} \geq \dfrac{-b}{a}$, car $a > 0$	$\dfrac{ax}{a} \leq \dfrac{-b}{a}$, car $a < 0$
$x \geq -\dfrac{b}{a}$	$x \leq -\dfrac{b}{a}$

L'ensemble des solutions de l'équation $ax + b \geq 0$ est $\left[-\frac{b}{a}\ ;\ +\infty\right[$.

L'ensemble des solutions de l'équation $ax + b \geq 0$ est $\left]-\infty\ ;\ -\frac{b}{a}\right]$.

Exercice 5. ♥

Résolvez les inéquations.

1. $-3x + 7 < x + 2$
2. $-5x - 2 \leq 0$
3. $-x > 9$
4. $2x - 7 < (3x - 4) - x$
5. $3x - (4 + 3x) > 2$

Correction exercice 5

1.

$$\begin{aligned}
-3x + 7 < x + 2 &\iff -3x + 7 - x < x + 2 - x \\
&\iff -4x + 7 < 2 \\
&\iff -4x + 7 - 7 < 2 - 7 \\
&\iff -4x < -5 \\
&\iff \frac{-4x}{-4} > \frac{-5}{-4} \\
&\iff x > \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = \left]\frac{5}{4}; +\infty\right[$.

2.

$$\begin{aligned}
-5x - 2 \leq 0 &\iff -5x - 2 + 2 \leq 0 + 2 \\
&\iff -5x \leq 2 \\
&\iff \frac{-5x}{-5} \geq \frac{2}{-5} \\
&\iff x \geq -\frac{2}{5}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = \left[-\frac{2}{5}; +\infty\right[$.

3.

$$\begin{aligned}
-x > 9 &\iff \frac{-x}{-1} < \frac{9}{-1} \\
&\iff x < -9
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} =]-\infty; -9[$.

4.

$$\begin{aligned}2x-7<(3x-4)-x &\iff 2x-7<3x-4-x\\ &\iff 2x-7<2x-4\\ &\iff 2x-7-2x<2x-4-2x\\ &\iff -7<-4\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours vraie, quelque soit la valeur choisie pour x. Donc :
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}=\mathbb{R}$.

5.

$$\begin{aligned}3x-(4+3x)>2 &\iff 3x-4-3x>2\\ &\iff -4>2\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours fausse, quelque soit la valeur choisie pour x. Donc :
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}=\varnothing$.

Exercice 6. Application.

Résolvez les systèmes d'inéquations.

1. $\begin{cases}2x-8\leq 5x+13\\ 4x-23\leq 10+x\end{cases}$
2. $\begin{cases}2x-8\geq 5x+13\\ 4x-23\geq 10+x\end{cases}$
3. $\begin{cases}2x-8\leq 5x+13\\ 4x-23\geq 10+x\end{cases}$

Correction exercice 6

1. L'ensemble des solutions de $2x-8\leq 5x+13$ est $\mathcal{S}_1=[-7;+\infty[$.
   L'ensemble des solutions de $4x-23\leq 10+x$ est $\mathcal{S}_2=]-\infty;11]$.
   L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2=[-7;+\infty[\cap]-\infty;11]=[-7;11]$.
2. L'ensemble des solutions de $2x-8\geq 5x+13$ est $\mathcal{S}_1=]-\infty;-7]$.
   L'ensemble des solutions de $4x-23\geq 10+x$ est $\mathcal{S}_2=[11;+\infty[$.
   L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2=]-\infty;-7]\cap[11;+\infty[=\varnothing$.
3. L'ensemble des solutions de $2x-8\leq 5x+13$ est $\mathcal{S}_1=[-7;+\infty[$.
   L'ensemble des solutions de $4x-23\geq 10+x$ est $\mathcal{S}_2=[11;+\infty[$.
   L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2=[-7;+\infty[\cap[11;+\infty[=[11;+\infty[$.

Remarques.

1. Le cas des inéquations produits sera traité dans une leçon ultérieure.

IV Exercices.

Exercice 7. Application.

Deux entreprises de transport proposent les tarifs suivants :

— 110 € au départ plus 1,26 € du kilomètre ;

— 120 € au départ plus 1,22 € du kilomètre.

Pour quels kilométrages le tarif du second transporteur est-il plus avantageux ?

Correction exercice 7

Notons x le nombre kilomètres parcourus, $A(x)$ le tarif pour x kilomètres du premier transporteur, $B(x)$ le tarif pour x kilomètres du second transporteur.

Résolvons l'inéquation $A(x) \geqslant B(x)$ dans $[0; +\infty[$.

$$\begin{aligned}
A(x) \geqslant B(x) &\iff 110 + 1{,}26\times \geqslant 120 + 1{,}22 \times x \\
&\iff 110 + 1{,}26x - 1{,}22x \geqslant 120 + 1{,}22x - 1{,}22x \\
&\iff 110 + (1{,}26 - 1{,}22)x \geqslant 120 \\
&\iff 110 + 0{,}04x \geqslant 120 \\
&\iff 110 + 0{,}04x - 110 \geqslant 120 - 110 \\
&\iff 0{,}04x \geqslant 10 \\
&\iff \frac{0{,}04x}{0{,}04} \geqslant \frac{10}{0{,}04} \\
&\iff x \geqslant 250
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation dans $[0; +\infty[$ est $\mathscr{S} = [250, +\infty[$.

Le second transporteur est plus avantageux pour plus de 250 km.

Exercice 8. Application.

Un libraire vend des crayons 2,4 € pièce. Sur ces articles ses frais s'élèvent à 0,6 € par crayon auxquels il faut ajouter une somme fixe de 34,2 €.

Calculez, en fonction de x, le bénéfice réalisé par la vente de x crayons. Combien doit-il vendre de crayons pour que le bénéfice soit compris entre 68,4 € et 102,6 € ?

Correction exercice 8

Déterminons le bénéfice en fonction de x.

Le bénéfice réaliser pour la vente de $x \in \mathbb{N}$ crayons est :

$$\begin{aligned} B(x) &= 2{,}4x - 0{,}6x - 34{,}2 \\ &= (2{,}4 - 0{,}6)x - 34{,}2 \end{aligned}$$

$B(x) = 1{,}8x - 34{,}2$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système $\begin{cases} 68{,}4 \leqslant B(x) \\ B(x) \leqslant 102{,}6 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} 68{,}4 \leqslant B(x) &\iff x \in [57, +\infty[\\ B(x) \leqslant 102{,}6 &\iff x \in]-\infty, 76] \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions du système est : $\mathscr{S} =]-\infty, 76] \cap [57, +\infty[= [57; 76]$.

Il devra vendre entre 57 et 76 crayons pour réaliser ses objectifs.

V Ce qu'il faut retenir.

1. Règles licites de manipulation d'inéquation.
2. Pour résoudre une inéquation se ramener à une inégalité à zéro (faire passer tous les termes dans un seul membre de l'équation).
3. Résoudre une inéquation linéaire.
4. Résoudre un système d'inéquations linéaires à une inconnue.
5. Mise en inéquation.