Les équations du premier degré.

I Généralités sur les équations.

Une *équation* est une égalité dans laquelle se trouvent des lettres (des *variables*) qui représentent des nombres (expression littérale).

Une équation est soit vraie, soit fausse, suivant les valeurs choisies pour remplacer les lettres.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie.

Il n'y a pas une unique méthode de résolution des équations. Il y a presque autant de méthodes que d'équations.

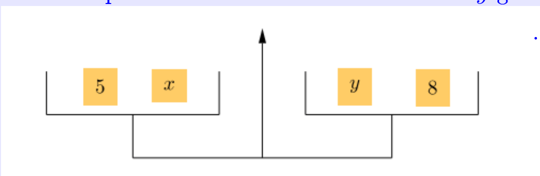
Nous apprendrons certaines de ces méthodes.

Pour simplifier la résolution et pour identifier à quel type d'équation nous avons à faire nous modifierons souvent l'équation de façon à obtenir une égalité à 0.

II Exemple.

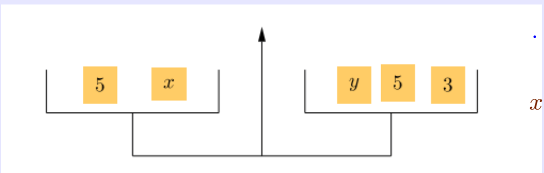
Exercice 1. Application.

Trouvez le poids de x en fonction de celui de y grâce aux trois étapes suivantes.



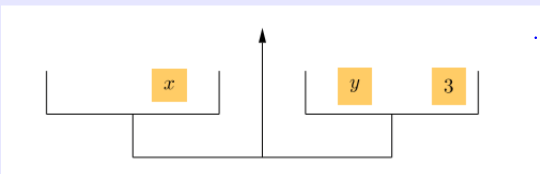
. . . .

$x + 5 = y + 8$



. . . .

$x + 5 - 5 = y + 8 - 5$

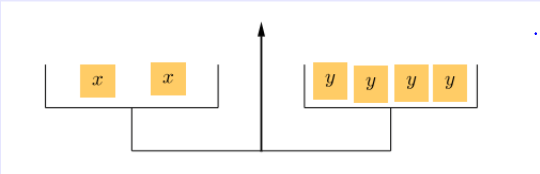


. . . .

$x = y + 3$

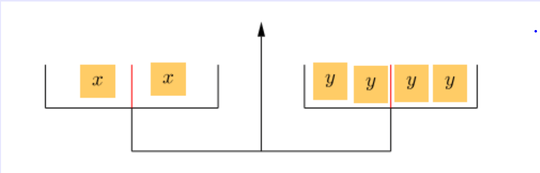
Exercice 2. Application.

Même objectif :



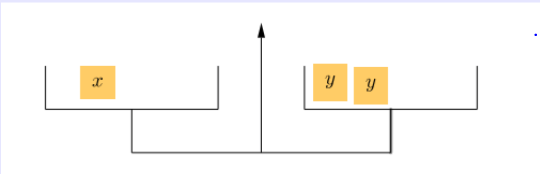
....

$2x = 4y$



....

$\frac{2x}{2} = \frac{4y}{2}$



....

$x = 2y$

III Modifications autorisées sur les équations.

Théorème 1

On ne modifie pas les solutions d'une équation en additionnant (respectivement en soustrayant, respectivement en multipliant, respectivement en divisant) par un même nombre non nul des deux côtés de l'égalité.

Démonstration 1

Par exemple pour l'addition. En logique, pour toutes quantités a et b, et pour toute expression $F(x)$, si $a = b$ alors $F(a) = F(b)$.

En particulier lorsque $F(x) = x + c$, nous obtenons $F(a) = F(b)$ et donc $a + c = b + c$.

Remarques.

1. Attention lorsque vous divisez de vérifier que vous ne divisez pas par zéro.
2. On ne peut multiplier par zéro sans modifier les résultats de l'équation. Le pouvoir absorbant du zéro fait disparaître l'information contenue dans l'équation.
3. Ce résultat constitue une boîte à outils. Il indique des transformations autorisées sur une équation pour en trouver les solutions.

4. Il faut beaucoup s'entraîner pour savoir quelles transformations utiliser pour résoudre telle ou telle équation.
5. Il est bien sûr toujours possible d'ajouter ou soustraire 0 mais c'est sans intérêt.

IV Équations linéaires.

Définition 1

Une *équation linéaire* (ou équation polynomiale de degré 1) est une équation de la forme

$$ax + b = 0$$

avec a et b des nombres fixés et x un nombre variable.

Remarques.

1. Pour identifier l'équation du premier degré on regroupe tous les termes d'un même côté de l'égalité. Autrement dit il faut se ramener à une égalité à 0.
2. La résolution des équations du premier degré consiste à « isoler le x ». Supposons que a n'est pas nul.

$$ax + b = 0$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned} ax + b - b &= 0 - b \\ ax &= -b \\ \frac{ax}{a} &= \frac{-b}{a}, \text{ car } a \neq 0 \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $ax + b = 0$ est $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Exercice 3. ♥

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations du premier degré suivantes d'inconnue x :

1. $x + 4 = 7$
2. $3x = 12$
3. $-3x + 4 = 13$
4. $-3x + 4 = 14x - 7$

Correction exercice 3

1. Résolvons l'équation.

$$x + 4 = 7$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} x + 4 - 4 &= 7 - 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{3\}$.

2. Résolvons l'équation.

$$3x = 12$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{3x}{3} &= \frac{12}{3} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{4\}$.

3. Résolvons l'équation.

$$-3x + 4 = 13$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} -3x + 4 - 4 &= 13 - 4 \\ -3x &= 9 \\ \frac{-3x}{-3} &= \frac{9}{-3} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{-3\}$.

4. Résolvons l'équation.

$$-3x + 4 = 14x - 7$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} -3x + 4 - 14x &= 14x + 7 - 14x \\ -17x + 4 &= 7 \\ -17x + 4 - 4 &= 7 - 4 \\ -17x &= 3 \\ \frac{-17x}{-17} &= \frac{3}{-17} \\ x &= -\frac{3}{17} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{-\frac{3}{17}\right\}$.

Exercice 4. Application.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\frac{3x+2}{7x-1} = 2.$$

Correction exercice 4

Avec le produit en croix on perd l'équivalence. Il faut donc procéder à un raisonnement par analyse-synthèse qui est plus long.

* Supposons qu'on ait réussi à trouver un nombre x tel que $\frac{3x+2}{7x-1} = 2$, alors $3x + 2 = 2(7x - 1)$.

  Cette dernière équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 2 \times 7x - 2 \times 1 \\ 3x + 2 &= 14x - 2 \end{aligned}$$

  Si x est une solution de l'équation alors forcément $x = \frac{4}{17}$.

* Vérifions que la seule solution possible est vraiment une solution :

$$\frac{3 \times \frac{4}{17} + 2}{7 \times \frac{4}{17} - 1} = 2$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{4}{17}\right\}$.

Exercice 5. Application.

1. $2x - 3 = 5$,
2. $x + 4 = 5x - 2$,
3. $3(x + 1) = 5x - 1$,
4. $-2(4 - x) + 1 = 2$,
5. $\frac{2}{3}x = 4$,
6. $-3x = 4$,
7. $-6x = \frac{2}{3}$,
8. $-\frac{t}{3} = 2$,
9. $2(3x - 1) - 5 = x + 1$,
10. $-3x + 4 = 2\left(x + \frac{2}{5}\right)$,
11. $3(x - 2) - 1 = -2(x + 4)$,
12. $2(4 - 3x) = -(x + 5)$,
13. $2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = x - \frac{1}{3}$,
14. $\frac{x-5}{7} = -3$,
15. $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$,
16. $\frac{x-3}{2} = 2x + 1$.

Correction exercice 5

1. $2x - 3 = 5$, $\mathscr{S} = \{4\}$.
2. $x + 4 = 5x - 2$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
3. $3(x + 1) = 5x - 1$, $\mathscr{S} = \{1\}$.
4. $-2(4 - x) + 1 = 2$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.
5. $\frac{2}{3}x = 4$, $\mathscr{S} = \{6\}$.
6. $-3x = 4$, $\mathscr{S} = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$.
7. $-6x = \frac{2}{3}$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{-1}{9}\right\}$.
8. $-\frac{t}{3} = 2$, $\mathscr{S} = \{-6\}$.
9. $2(3x - 1) - 5 = x + 1$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{8}{5}\right\}$.
10. $-3x + 4 = 2\left(x + \frac{2}{5}\right)$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{16}{25}\right\}$.
11. $3(x - 2) - 1 = -2(x + 4)$, $\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$.
12. $2(4 - 3x) = -(x + 5)$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{11}{5}\right\}$.
13. $2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = x - \frac{1}{3}$, $\mathscr{S} = \{-5\}$.
14. $\frac{x-5}{7} = -3$, $\mathscr{S} = \{-16\}$.
15. $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.
16. $\frac{x-3}{2} = 2x + 1$, $\mathscr{S} = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

Exercice 6. ♥

Identifiez puis résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations linéaires parmi les équations d'inconnue x suivantes :

1. $x^2 = 3x - 1$
2. $-4x + 2 = 10$
3. $\sqrt{x} + 1 = 3$
4. $9x - 1 = 2x - 15$
5. $\frac{1}{x} + 3 = 1$
6. $\frac{1}{3} = \frac{3x}{6} - 7$
7. $5x - 7 - x = 4x$
8. $\sqrt{7}x - 2 = -\pi$

Correction exercice 6

Toutes les expressions qui ne ressemble pas à des formules algébriques de fonctions affines ne correspondent pas à des équations linéaires. Concrètement, les expressions $\sqrt{x}$, x^2, x^3, ..., $\frac{1}{x}$ ne doivent pas apparaître.

1. Ce n'est pas une équation linéaire.
2. C'est une équation linéaire et $\mathscr{S} = \{-2\}$.
3. Ce n'est pas une équation linéaire.
4. C'est une équation linéaire et $\mathscr{S} = \{-2\}$.
5. Ce n'est pas une équation linéaire.
6. Il s'agit bien d'une équation linéaire.

$$\frac{1}{3} = \frac{3x}{6} - 7$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= \frac{3}{6}x - 7 \\
\frac{1}{3} + 7 &= \frac{3}{6}x - 7 + 7 \\
\frac{22}{3} &= \frac{3}{6}x \\
\frac{6}{3} \times \frac{22}{3} &= \frac{6}{3} \times \frac{3}{6}x \\
\frac{22}{6} &= x \\
\frac{2 \times 11}{2 \times 3} &= x
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{11}{3}\right\}$.

7. Il s'agit bien d'une équation linéaire.
Cependant la situation est un peu particulière comme le montre la résolution de cette équation.

$$5x - 7 - x = 4x$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 4x - 7 &= 4x \\ 4x - 7 - 4x &= 4x - 4x \\ -7 &= 0 \end{aligned}$$

Toute la difficulté est d'interpréter cette dernière égalité.
Lorsque nous travaillons par équivalence toutes les phrases mathématiques écrites sont aussi vraies les unes que les autres. Or la dernière phrase que nous avons obtenue est, très clairement, fausse, donc la première est tout aussi fausse. Ainsi l'égalité proposée est toujours fausse, et ce, qu'elle que soit la valeur choisie pour x. Autrement dit il n'y a aucune solution.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \varnothing$.

8. La présence de $\sqrt{7}$ ou de π ne doit pas effrayer : il s'agit juste de nombres.
C'est une équation linéaire et :

$$\sqrt{7}x - 2 = -\pi$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \sqrt{7}x - 2 + 2 &= -\pi + 2 \\ \sqrt{7}x &= -\pi + 2 \quad \frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{7}} = \frac{-\pi + 2}{\sqrt{7}} \\ x &= \frac{-\pi + 2}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

Et il n'y a pas d'écriture plus simple de ce nombre.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{-\pi+2}{\sqrt{7}}\right\}$.

V Équation produit.

Le résultat suivant est fondamental pour résoudre un grand nombre d'équations :

Théorème 2

> Soient a et b deux quelconques nombres réels.
> Dire que : $ab = 0$ équivaut à dire que $a = 0$ ou $b = 0$.

Remarques.

1. On peut formuler ce résultat de la façon suivante : pour qu'un produit soit nul il faut et il suffit que l'un des facteur (au moins) soit nul.
2. Ce résultat se généralise à un produit de plus de deux facteurs.
3. Dire que : $\frac{a}{b} = 0$ équivaut à dire que $a = 0$. (b est forcément non nul).

Exercice 7. ♥

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $(-3x+7)(4x-6) = 0$

Correction exercice 7

Nous reconnaissons une équation produit nul.

Résolvons l'équation.

$$(-3x+7)(4x-6) = 0$$

équivaut successivement à :

$$\begin{array}{rcl}
-3x+7 = 0 & \text{ou} & 4x-6 = 0 \\
-3x+7-7 = 0-7 & \text{ou} & 4x-6+6 = 0+6 \\
-3x = -7 & \text{ou} & 4x = 6 \\
\dfrac{-3x}{-3} = \dfrac{-7}{-3} & \text{ou} & \dfrac{4x}{4} = \dfrac{6}{4} \\
x = \dfrac{7}{3} & \text{ou} & x = \dfrac{2\times 3}{2^2}
\end{array}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{7}{3};\ \frac{2}{3}\right\}$.

Exercice 8. ♥

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $\dfrac{(x-3)(x+4)(x+4)}{(x+2)(x+4)(x-1)} = 0$.

Correction exercice 8

L'expression fractionnaire qui apparaît dans cette équation ne peut s'annuler que si son numérateur s'annule. Cependant nous allons devoir être prudent car son dénominateur comportant des x il peut-y avoir des valeurs interdite. Ces valeurs interdites nous obligent à abandonner le raisonnement par équivalence et adopter le raisonnement par analyse-synthèse.

Déterminons par analyse-synthèse l'ensemble des solutions de cette équation.

* Analyse.
  Supposons que le nombre x soit une solution de l'équation.
  Alors forcément, l'expression étant fractionnaire, son numérateur doit être nul :

$$(x-3)(x+4)(x+4) = 0$$

Nous reconnaissons une équation produit-nul.

La précédente équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} x-3=0 \quad &\text{ou} \quad x+4=0 \quad \text{ou} \quad x+4=0 \\ x=3 \quad &\text{ou} \quad x=-4 \quad \text{ou} \quad x=-4 \end{aligned}$$

Nous voyons que, forcément, x ne peut être que l'un de ces deux nombres : 3 ou -4.

* Synthèse.
  En phase d'analyse nous avons vu qu'il n'y a que deux solutions possibles. Il faut maintenant vérifier que ce sont effectivement des racines.

  - Vérifions que 3 est bien une solution.

$$\begin{aligned} \frac{(3-3)(3+4)(3+4)}{(3+2)(3+4)(3-1)} &= \frac{0\times 7\times 7}{5\times 7\times 2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

  - Par contre -4 n'est pas une solution car sinon le dénominateur de l'expression fractionnaire s'annule. -4 est une valeur interdite.

  Ainsi une seule des deux solutions convient.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{3\}$.

VI Exercices.

Exercice 9. Application.

Soient $A(6;5)$ et $S(2;3)$ deux points d'un repère (O,I,J).
Déterminez les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à S.

Correction exercice 9

Déterminons les coordonnées de A'.

Dire que A' est symétrique de A par rapport à S équivaut à dire que S est milieu de $[AA']$.

Et dire que S est milieu de $[AA']$ équivaut successivement à dire que

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ 2 &= \frac{6 + x_{A'}}{2} \\ 2\times 2 &= 2\times \frac{6 + x_{A'}}{2} \\ 4 &= 6 + x_{A'} \\ 4-6 &= 6 + x_{A'}-6 \\ -2 &= x_{A'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{y_A + y_{A'}}{2} \\ 3 &= \frac{5 + y_{A'}}{2} \\ 2\times 3 &= 2\times \frac{5 + y_{A'}}{2} \\ 6 &= 5 + y_{A'} \\ 6-5 &= 5 + x_{A'}-5 \\ 1 &= x_{A'} \end{aligned}$$

$$\boxed{A'(-2;1).}$$

Exercice 10. ♥

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{3}x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculez l'image de $\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Déterminez les antécédents de -7 par la fonction f.

Correction exercice 10

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3}x - 1 \\ f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} \times \sqrt{3} - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. Les antécédents de -7 par la fonction f sont les nombres x tels que : $f(x) = -7$.

Résolvons cette dernière équation (qui est linéaire et donc se résout en isolant le x).

$$\begin{aligned} f(x) = -7 &\Leftrightarrow \sqrt{3}x - 1 = -7 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3}x - 1 + 1 = -7 + 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3}x = -6 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} = \frac{-6}{\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{6}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

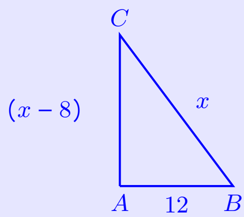
Et en présentant élégamment :

$$f(x) = -7 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$$

L'ensemble des antécédents de -7 par f est donc $\{2\sqrt{3}\}$.

Exercice 11. Application.

Trouver x pour que le triangle ABC soit rectangle en A.



Correction exercice 11

ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, d'après le théorème de Pythagore.

Autrement dit il faut et il suffit que : $(x-8)^2 + 12^2 = x^2$.

Cette dernière équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} x^2 - 2 \times x \times 8 + 8^2 + 144 &= x^2 \\ x^2 - 16x + 64 + 144 &= x^2 \end{aligned}$$

En se ramenant à une égalité à 0 :

$$\begin{aligned} x^2 - 16x + 208 - x^2 &= x^2 - x^2 \\ -16x + 208 &= 0 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons une équation linéaire :

$$\begin{aligned} -16x + 208 - 208 &= 0 - 208 \\ -16x &= -208 \\ \frac{-16x}{-16} &= \frac{-208}{-16} \\ x &= 13 \end{aligned}$$

ABC est rectangle en A si et seulement si $x = 13$.

Exercice 12. ♥

Déterminez l'ensemble des valeurs interdites pour le calcul défini pour x réel par

$$\frac{\sqrt{x}}{2x-3}$$

Il faut utiliser le fait qu'une racine carrée s'applique uniquement à un nombre positif et qu'un quotient ne peut avoir un dénominateur nul.

Exercice 13. Application.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{2x-4}{x} = 3$$

Correction exercice 13

L'expression « résolvez dans $\mathbb{R}$ signifie que nous garderons que les solutions qui sont dans $\mathbb{R}$.

Il y a deux manipulations possibles : en se ramenant à une expression fractionnaire nulle ou en utilisant le produit en croix.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation par analyse-synthèse.

* Analyse.

Si $x \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation, alors nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{2x-4}{x} &= 3\\
\frac{2x-4}{x}-3 &= 3-3\\
\frac{2x-4}{x}-\frac{3x}{x} &= 0\\
\frac{2x-4-3x}{x} &= 0\\
\frac{-x-4}{x} &= 0\\
-x-4 &= 0\\
-x-4+4 &= 0+4\\
-x &= 4\\
-x\times(-1) &= 4\times(-1)\\
x &= -4
\end{aligned}$$

ou manipulation alternative utilisant le produit en croix :

$$\begin{aligned}
\frac{2x-4}{x} &= 3\\
\frac{2x-4}{x} &= \frac{3}{1}\\
(2x-4)\times(1) &= (3)\times(x)\\
2x-4 &= 3x\\
2x-4-2x &= 3x-2x\\
-4 &= x
\end{aligned}$$

* Synthèse.
  Nous avons vu (dans la phase d'analyse) qu'il ne peut y avoir qu'une seule solution à savoir -4.
  Or

$$\frac{2\times(-4)-4}{-4} = 3$$

donc -4 est bien une solution de l'équation.
Ici nous aurions pu avoir une difficulté si la solution trouvée avait été une valeur interdite.

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathscr{S} = \{-4\}.$$

Exercice 14. Application.

Dans une assemblée, quarante personnes ont plus de 40 ans, un quart a entre 30 et 40 ans et un tiers a moins de 30 ans. Quel est le nombre de personnes de cette assemblée ?

Correction exercice 14

Le plus souvent (en seconde) l'inconnue qu'il est pertinent d'introduire est la grandeur recherchée.

Notons x le nombre de personnes dans l'assemblée.
L'énoncé se traduit alors par l'égalité :

$$40 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = x$$

Il s'agit d'une équation linéaire dont l'unique solution est 96.

Exercice 15. Application.

Considérons un parallélogramme $ABCD$ dans un plan muni d'un repère. Sachant que $A(-1;7)$, $B(-20;100)$, $C(3;107)$ et $D(22;y_D)$, déterminez l'ordonnée y_D du point D.

Correction exercice 15

Déterminons l'ordonnée de D.

Notons M le milieu de $[AC]$.
Nous avons

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} \\ &= \frac{7 + 107}{2} \\ &= 57 \end{aligned}$$

Et puisque M est aussi le milieu de $[BD]$.

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_B + y_D}{2} \\ 57 &= \frac{100 + y_D}{2} \\ 57\times 2 &= \frac{100 + y_D}{2}\times 2 \\ 114 &= \frac{(100 + y_D) \times 2}{2 \times 1} \\ 114 &= 100 + y_D \\ 114-100 &= 100 + y_D-100 \\ 14 &= y_D \end{aligned}$$

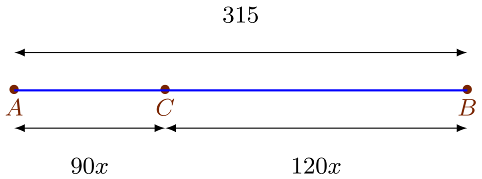
$$y_D = 14.$$

Exercice 16. Application.

Deux trains partent à 4 h du matin, l'un de la ville A vers la ville B, et l'autre de la ville B située à 315 km de A en direction de la ville A. À quelle heure se fera la rencontre, sachant que le premier roule à 90 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ et le second à 120 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$?

Correction exercice 16

Notons x le temps, en heures, mis par les deux trains pour se croiser.



La distance parcourue par le train partant de A au moment du croisement est (en fonction de x) $90x$.

La distance parcourue par le train partant de B au moment du croisement est (en fonction de x) $120x$).

Ainsi x doit vérifier l'équation

$$90x + 120x = 315$$

Il s'agit d'une équation linéaire dont l'unique solution est $x = 1{,}5$.

Autrement dit les trains se croisent à 5 h 30.

Exercice 17. Application.

Un litre d'une boisson contient 7 % de sirop. Quel volume d'eau pure doit-on rajouter pour qu'un litre de cette nouvelle boisson contienne 5 % de sirop ?

Correction exercice 17

Déterminons le volume d'eau à rajouter.

Notons x le volume, exprimé en litre, d'eau pure rajouté dans la boisson.

Après mélange la boisson est composée de $\frac{7}{100} \times 1 = 0{,}07$ L de sirop, de $1 - 0{,}07 = 0{,}93$ L d'eau et de x litres d'eau.

On souhait que le mélange contienne 5 % de sirop donc :

$$\frac{0{,}07}{0{,}07 + 0{,}93 + x} = \frac{5}{100}$$

ce qui équivaut successivement à

$$\frac{0{,}07}{1+x} = \frac{5}{100}$$

Puisque $x+1 \neq 0$ (utilisation du produit en croix) :

$$\begin{aligned} 0{,}07 \times 100 &= (1+x) \times 5 \\ 7 &= 5+5x \\ 7-5 &= 5+5x-5 \\ 2 &= 5x \\ \frac{2}{5} &= x \end{aligned}$$

Pour que la nouvelle boisson contienne 5 % de sirop il faut rajouter 0,4 L.

Autre façon de raisonner : la quantité de sirop avant et après remplissage est la même donc :

$$\frac{7}{100} \times 1 = \frac{5}{100} \times (x+1)$$

Exercice 18. Application.

Quel est le rayon d'un disque dont l'aire égale le périmètre ?

Correction exercice 18

Remarquons que ce problème n'a pas de sens pour un physicien puisque l'aire et le périmètre ont des dimensions différentes.

Deux méthodes de résolution : par disjonction des cas ou par résolution de l'équation en factorisant.

Exercice 19. Application.

Problème publié dans le Liber Abaci *(1202) par Léonard de Pise dit Fibonacci.*

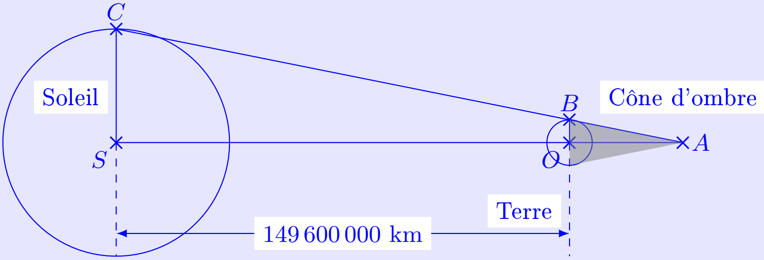
Deux tours élevées l'une de 30 pas, l'autre de 40 sont distantes de 50 pas ; entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps. Quelles sont les distances horizontales du centre de la fontaine aux deux tours ?

L'apport principal de *Léonard de Pise* (dit *Fibonacci*) fut l'introduction de la numération décimale dans le traité de comptabilité *Liber abaci* alors que l'Europe utilise encore les chiffres romains.

Son nom est resté célèbre jusqu'à nos jours grâce à une suite de nombres qui porte son nom et qui est associée au nombre d'or. Chaque terme de la suite de Fibonacci, qui commence par 0 puis 1, est la somme des deux précédents.
Cette suite est souvent évoquée dans des thématiques ésotérique ou esthétique (comme le roman *Da Vinci code*).

Leonardo Fibonacci
(dall'opera *I benefattori dell'umanità*; vol. VI, Firenze, Ducci, 1850)

Exercice 20. Application.



1. La distance moyenne Soleil-Terre (calculée de centre à centre) est de 149 600 000 km.

   Le rayon du soleil est de 696 000 km, celui de la Terre de 6 360 km.

   Démontrez que la hauteur OA du cône d'ombre situé derrière la Terre est de 1 379 642 km par valeur approchée à l'unité près par excès.

2. Calculez le volume du cône d'ombre de sommet A et dont la base est formé par le disque de rayon OB.

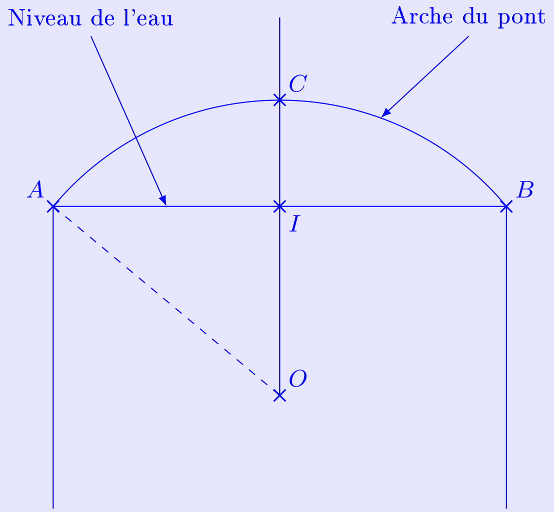
3. La distance moyenne Terre-Lune (calculée de centre à centre) est de 382 000 km. Le rayon de la lune est de 1 738 km Étudiez la possibilité d'éclipses totales de la Lune en période de pleine lune.

Exercice 21. Application.

Extrait du C.R.P.E. 2017 (concours de recrutement des professeurs des écoles).

Péniche et pont.

Un pont a une arche en forme d'arc de cercle.
Lors d'une crue, l'eau atteint les sommets A et B des piliers du pont.
La hauteur maximale IC entre le niveau de l'eau et le sommet de l'arche est alors de 5 mètres. L'écartement AB entre les deux piliers du pont est de 24 mètres.
La situation est modélisée par le schéma suivant, qui n'est pas à l'échelle, sur lequel O est le centre de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ et (CO) est l'axe de symétrie de la figure.



1. Montrer que le rayon OA de l'arche est 16,9 m.

On assimile la coupe de la partie émergée d'une péniche, vue de face, à un rectangle de 4 mètres de haut et de 12 mètres de large.

La situation est modélisée par le schéma ci-dessus, qui n'est pas à l'échelle sur lequel on a $EH = 12$ m et $FE = 4$ m.

2. Cette péniche peut-elle passer sous l'arche du pont sans dommages ? Justifier.

Correction exercice 21

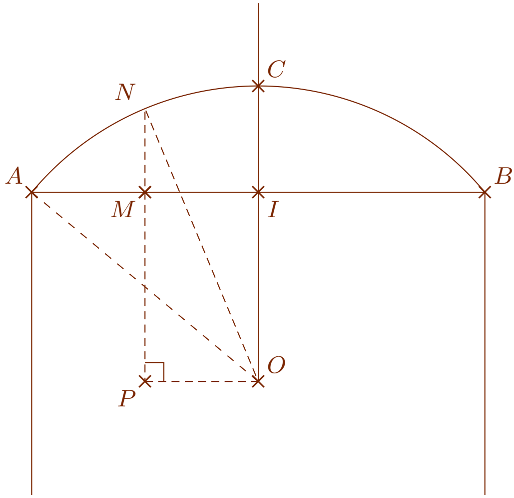
1. Déterminons OA.

   Puisque (CO) est l'axe de symétrie de la figure, AIO est rectangle en I.
   Donc, d'après le théorème de Pythagore : $AO^2 = OI^2 + IA^2$.
   Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
OA^2 &= (OA - IC)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\
OA^2 &= (OA - 5)^2 + \left(\frac{24}{2}\right)^2 \\
OA^2 &= OA^2 - 2 \times OA \times 5 + 5^2 + 12^2 \\
OA^2 &= OA^2 - 10 \cdot OA + 169 \\
OA^2 &= OA^2 - 2 \times OA \times 5 + 5^2 + 12^2 \\
OA^2 - OA^2 &= OA^2 - 10 \cdot OA + 169 - OA^2 \\
0 &= -10 \cdot OA + 169 \\
010 \cdot OA &= -10 \cdot OA + 16910 \cdot OA \\
10 \cdot OA &= 169 \\
\frac{10 \cdot OA}{10} &= \frac{169}{10} \\
OA &= 16{,}9
\end{aligned}$$

$$\boxed{OA = 16{,}9 \text{ m}}$$

2. Notons M le point appartenant à $[AI]$ tel que $MI = 6$, N le point de l'arche du pont situé à la verticale de M et P le point de $[NM)$ tel que ONP soit un triangle rectangle en P.



Déterminons MN.

NOP est un triangle rectangle en P donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$NP^2 + PO^2 = ON^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} NP^2 &= OA^2 - 6^2 \\ &= 16{,}9^2 - 6^2 \end{aligned}$$

NP étant une longueur donc positive :

$$\begin{aligned} NP &= \sqrt{16{,}9^2 - 6^2} \\ &= \sqrt{249{,}61} \end{aligned}$$

Nous en déduisons la hauteur

$$\begin{aligned} MN &= NP - PM \\ &= NP - OI \\ &= \sqrt{249{,}61} - (OA - CI) \\ &= \sqrt{249{,}61} - (16{,}9 - 5) \\ &= \sqrt{249{,}61} - 11{,}9 \\ &\approx 3{,}899 \end{aligned}$$

La péniche ne pourra pas passer sous l'arche sans dommage.

VII Ce qu'il faut retenir.

1. Règles licites de manipulation d'équation.
2. Pour résoudre une équation se ramener à une égalité à zéro (faire passer tous les termes dans un seul membre de l'équation).
3. Résoudre une équation linéaire.
4. Résoudre une équation produit.
5. Mise en équation et en particulier choisir une inconnue.