Racines carrées d'entiers.

I Définition.

Définition 1

La *racine carrée* d'un entier naturel n est le nombre positif x tel que :

$$x \times x = x^2 = n$$

et on note : $x = \sqrt{n}$.

Remarques.

1. Compte tenu de la règle du signe d'un produit il est clair que l'on ne peut prendre la racine carrée que d'un nombre positif (ou nul).
2. Cette définition nécessiterait de démontrer que l'on peut toujours trouver un tel nombre x et que d'autre part il est unique (puisque positif). Nous devrons attendre de bien connaître les fonctions pour pouvoir le justifier.
3. Sauf si n est un carré parfait $(1, 4, 9, \ldots)$, $\sqrt{n}$ est un nombre qui n'est pas rationnel. Dans ce cas il n'y a pas d'écriture exacte du nombre plus simple que $\sqrt{n}$.
4. Trivialement : $\sqrt{n}^2 = n$.

II Racine carrée et opérations.

Les règles de priorités sont les suivantes :

Priorité 1 Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires. La barre de fraction ou la racine carrée jouent le même rôle que des parenthèses.

Priorité 2 Les exposants (puissances).

Priorité 3 Les multiplications et division $(\div)$ en allant de gauche à droite.

Priorité 4 Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

Proposition 1

Le produit des racines carrées égale la racine carrée du produit. Pour a et b des entiers naturels :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Démonstration 1

Soit a et b des entiers naturels.

Démontrons que $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est la racine carrée de ab.

Vérifions que le nombre $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est effectivement un nombre positif qui élevé au carré égale ab.

* Par définition de la racine carrée $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est positif.
*

$$\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) = \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2$$

Puisque a et b sont positifs :

$$\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) = a \times b$$

Nous avons démontré que quelques soient les entiers naturels a et b, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

Remarques.

1. Ce résultat se généralise à tous les nombres positifs et pas uniquement aux entiers.
2. Si de plus $b \neq 0$ alors de même :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

3. Il n'y pas de résultat équivalent pour les additions et soustractions : $\sqrt{9}+\sqrt{4} \neq \sqrt{9+4}$.

III Exercices.

Exercice 1. ♥

Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers b étant le plus petit possible.
Vous pouvez utiliser une décomposition en facteurs premiers. Et en désespoir de cause sachez trouver les valeurs à la calculatrice.

1. $A = \sqrt{36}$
2. $B = \sqrt{8}$
3. $C = \sqrt{2} \times \sqrt{18}$
4. $D = \sqrt{7} \times \sqrt{14}$

Correction exercice 1

1. $A = \sqrt{6^2} = 6$
2. $B = \sqrt{2^3} = \sqrt{2 \times 2^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2^2} = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$
3. $C = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{2^2 \times 3^2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} = 2 \times 3$
4. $D = \sqrt{7 \times 14} = \sqrt{2 \times 7^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{7^2} = 7\sqrt{2}$

Exercice 2. Application.

Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers b étant le plus petit possible.

1. $A = \sqrt{64}$
2. $B = \sqrt{27}$
3. $C = \sqrt{15} \times \sqrt{3}$
4. $D = \sqrt{12} \times \sqrt{6}$

Correction exercice 2

1. $A = \sqrt{8^2} = 8$
2. $B = \sqrt{3 \times 9} = \sqrt{3} \times \sqrt{3^2} = \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$
3. $C = \sqrt{5 \times 3} \times \sqrt{3} = \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{5} \times \sqrt{3}^2 = 3\sqrt{5}$
4. $D = \sqrt{12 \times 6} = \sqrt{4 \times 3 \times 2 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

Exercice 3. ♥

Lorsqu'un calcul comprend des fractions et des racines carrées le résultat doit être présenté sous la forme $\frac{a}{b}\sqrt{c}$ avec a, b et c des entiers, b étant non nul et c le plus petit possible. Écrivez les calculs suivants sous cette forme :

1. $A = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$
2. $B = \dfrac{\sqrt{7}}{22} \times \dfrac{11}{\sqrt{7}}$
3. $C = \dfrac{\sqrt{240}}{\sqrt{85}}$

Correction exercice 3

1. $A = \frac{\sqrt{2 \times 3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

2. $B = \frac{\sqrt{7}\times 11}{22\times\sqrt{7}} = \frac{11\sqrt{7}}{2\times 11\sqrt{7}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$
3. $C = \frac{\sqrt{2^4\times 3\times 5}}{\sqrt{5\times 17}} = \sqrt{2^4} \times \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{17}} = 4\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}} = 4\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 4\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{17}}{\sqrt{17}\times\sqrt{17}} = 4\frac{\sqrt{3\times 17}}{\sqrt{17^2}} = \frac{4}{17}\sqrt{51}$

Exercice 4. Application.

1. Évaluez la quantité A en donnant le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers b étant le plus petit possible.

$$A = \sqrt{3} \times \sqrt{12}$$

2. Calculez la valeur de B sous la forme $\frac{a}{b}\sqrt{c}$ avec a, b et c des entiers, $\frac{a}{b}$ étant irréductible et c le plus petit possible.

$$B = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{63}}$$

Correction exercice 4

1.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3 \times 12} \\ &= \sqrt{3 \times 2^2 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2 \times 3^2} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \\ &= 2 \times 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 6\sqrt{1}.}$$

2.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{2 \times 7}}{\sqrt{3^2 \times 7}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 7}{3^2 \times 7}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$B = \frac{1}{3}\sqrt{2}.$$

Exercice 5. Application.

Un triangle MNP rectangle en P est tel que : $MN = 4$ et $NP = \frac{1}{2}$
Calculez MP.

Correction exercice 5

Calculons MP.

MNP est rectangle en P donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$MP^2 + NP^2 = MN^2$$

Or : $MN = 4$ et $NP = \frac{1}{2}$ donc

$$MP^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4^2$$

ce qui équivaut successivement à

$$MP^2 + \frac{1}{4} = 16$$
$$MP^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 16 - \frac{1}{4}$$
$$MP^2 = \frac{63}{4}$$

Autrement dit $MP = \sqrt{\frac{63}{4}}$ ou $MP = -\sqrt{\frac{63}{4}}$.
Mais MP est une longueur donc est un nombre positif :

$$MP = \sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{\sqrt{3^2 \times 7}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

Finalement

$$MP = \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

Exercice 6. ♥

Un triangle ABC rectangle en A est tel que : $AB = \frac{2}{3}$ et $AC = \frac{3}{2}$.
Calculez BC.

Correction exercice 6

Calculons BC.

ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Donc :

$$BC^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$BC^2 = \frac{4}{9} + \frac{9}{4}$$
$$BC^2 = \frac{97}{36}$$

BC est une longueur c'est donc un nombre positif :

$$BC = \sqrt{\frac{97}{36}}$$

Donc :

$$\boxed{BC = \frac{1}{6}\sqrt{97}}$$

Exercice 7. Application.

Un triangle MNP rectangle en M est tel que : $MN = \frac{7}{3}$ et $MP = 2$.
Calculez BC.

IV Ce qu'il faut retenir.

1. "L'affinité" qu'il y a entre la racine carrée et la multiplication ou la division.
2. Le résultat d'un calcul impliquant une racine carrée est souvent un nombre irrationnel. Il est donc impossible d'en donner une écriture décimale. Dans ce cas le résultat est donné en conservant le symbole $\sqrt{}$.
3. Pour ceux qui envisagent la filière scientifique l'astuce de la quantité conjuguée se généralise.
4. Théorème de Pythagore (et sa réciproque).