Les rationnels.

I Les fractions.

Définition 1

Une *fraction* est un nombre qui peut s'écrire comme le quotient d'un entier (relatif) par un autre entier (relatif non nul).

Remarques :

1. Lorsqu'un nombre, dans son écriture décimale, n'a que des zéros à partir d'un certain nombre de décimales alors on dit que c'est un *nombre décimal*. Ainsi : $2\,315{,}895\,643 = 2\,315{,}895\,643\,000\ldots$ est un nombre décimal.

   Tous les nombres décimaux peuvent s'écrire sous forme de fraction : $2\,315{,}895\,643 = \frac{2\,315\,895\,643}{1\,000\,000}$.
2. Il existe des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions : l'irrationalité de π est admise mais celle de $\sqrt{2}$ sera démontrée dans une prochaine leçon.
3. Rappelons une règle de priorité opératoire : dans une écriture fractionnaire la division correspondant à la barre de fraction est la dernière opération effectuée.
4. La manipulation des fractions nécessite de connaître les règles d'addition (réduire au même dénominateur),

   $$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay + xb}{by}$$

   ♡

   de multiplication,

   $$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$$

   ♡

   et de division

   $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x}.$$

   ♡

   Rappelons encore que pour simplifier une fraction il faut qu'il y ait un facteur commun au numérateur et au dénominateur :

   $$\frac{a \cdot x}{b \cdot x} = \frac{a}{b}$$

   ♡
5. Une astuce d'écriture qui nous sera souvent utile

   $$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$$

   ♡

6. Rappelons enfin qu'il est impossible de diviser par 0.
7. Les règles de priorités pour l'instant se limitent à :

   Priorité 1 Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires. La barre de fraction joue le même rôle que des parenthèses autour des numérateurs et dénominateurs.

   Priorité 2 Les multiplications et division ($\div$) en allant de gauche à droite.

   Priorité 3 Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

II Les nombres rationnels.

Définition 2

Les *nombres rationnels* sont les nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fraction. L'ensemble de tous les nombres rationnels est noté : $\mathbb{Q}$.

Remarques :

1. Un entier est un nombre rationnel. Par exemple : $-13 = \frac{-13}{1}$.
2. Les nombres décimaux peuvent s'écrire comme des fractions donc ce sont des nombres rationnels. Ainsi : $0{,}1 = \frac{1}{10}$.
3. Il existe des nombres qui ne sont pas décimaux et qui sont rationnels. Ainsi $\frac{1}{3}$ est un nombre rationnel mais son écriture décimale est infinie donc ce n'est un nombre décimal.
4. Tous les nombres ne sont pas rationnels.
5. Lorsqu'un nombre rationnel a une écriture décimale infinie on préfère son écriture fractionnaire.
6. Un nombre rationnel admet une écriture fractionnaire canonique (unique) appelée la *forme irréductible* qui est obtenue lorsque le PGCD des numérateur et dénominateur est 1 (ils n'ont pas de facteur commun). *confer infra.*

Proposition 1

Lorsqu'un nombre a une écriture décimale infinie périodique c'est un nombre rationnel.

Remarques :

1. Ce résultat est admis.

2. On dit que l'écriture est périodique lorsqu'une série de chiffre se reproduit indéfiniment.

Exemples.

1. 0,333 ... est rationnel.
2. 45,78242424 ... est rationnel.

III Forme irréductible d'une fraction.

Nombres premiers.

Un entier naturel est dit *premier* si et seulement il a exactement deux diviseurs distincts positifs.

Exemples.

1. 12 n'est pas un nombre premier puisqu'il est divisible par 2 et 3.
2. Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
3. 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

Décomposition en facteurs premiers.

Théorème 1 - théorème fondamental de l'arithmétique

> Tout entier naturel supérieur ou égale à 2 admet une décomposition en facteurs premiers unique à l'ordre des facteurs près.

Exemples.

1. $12 = 2 \times 2 \times 3$ et 2 et 3 sont bien des nombres premiers.
2. $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.
3. $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$.

Remarques.

1. Pour que l'écriture de la décomposition soit unique la convention est d'écrire une seule fois chaque facteur premier à la puissance convenable et d'écrire les facteurs dans l'ordre croissant. On n'écrira pas $3 \times 2 \times 3$ mais 2×3^2.
2. D'après ce théorème tous les résultats sur les nombre entiers naturels peuvent se ramener à des résultats sur les nombres premiers.

Exercice 1. ♥

Déterminez la décomposition en facteurs premiers de 180.

Forme irréductible d'une fraction.

Le nombre $\frac{1}{2}$ peut encore s'écrire $\frac{2}{4}$. L'écriture fractionnaire d'un nombre n'est pas unique. Ceci pouvant produire de la confusion les mathématiciens ont retenu une écriture fractionnaire qui est unique : *la forme irréductible d'une fraction*.

Proposition 2

Tout nombre rationnel s'écrit de façon unique comme une fraction dont le numérateur et le dénominateur non pas d'autre commun diviseur que 1 (ou -1).

Exemples.

1. $\frac{1}{3}$ est une forme irréductible.
2. $\frac{14}{21}$ n'est pas une forme irréductible puisque 14 et 21 admettent 7 pour diviseur commun : $\frac{14}{21} = \frac{2\times7}{3\times7} = \frac{2}{3}$.
3. En toute rigueur la forme irréductible de l'entier 5 devrait s'écrire $\frac{5}{1}$ cependant l'usage veut que nous usions de l'écriture la plus simple : 5.

Remarques.

1. Des nombres entiers qui n'ont pas de diviseur commun autre que 1 ou -1 sont dits *premiers entre eux*.
2. Pour trouver la forme irréductible d'une fraction il faut recherche le plus grand facteur commun au numérateur et au dénominateur qu'on appelle le P.G.C.D. (plus grand commun diviseur). Le P.G.C.D. s'obtient grâce à l'algorithme d'Euclide.
3. Dans la pratique pour trouver la forme irréductible nous utiliserons des décompositions en facteurs premiers.

Exercice 2. ♥

Donnez la forme irréductible du nombre rationnel $\dfrac{120}{300}$.

IV Exercices.

Exercice 3. ♥

Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme de fraction irréductibles. :

1. $A = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{7}$
2. $B = \dfrac{1}{7} - \dfrac{4}{11}$
3. $C = \dfrac{-5}{3} + \dfrac{2}{7}$
4. $D = \dfrac{3}{-7} - \dfrac{-2}{3}$

Nous dirons qu'un calcul est un quotient si la dernière opération effectuée en respectant les priorités opératoires est une division.

Exercice 4. ♥
Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

1. $A = -\dfrac{-4}{7-3}$
2. $B = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{6}{7}$
3. $C = \dfrac{-2}{4} \times \left(-\dfrac{3}{-6}\right)$
4. $D = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{7}}$
5. $E = \dfrac{3}{\frac{5}{4}}$
6. $F = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{1}{7}} \times \dfrac{1}{2}$

Exercice 5. Application.
Calculez et donnez le résultat sous forme de fraction irréductible.

1. $A = \dfrac{-3}{2} + \dfrac{1}{5}$.
2. $B = \dfrac{2}{6} \times \dfrac{3}{7}$.
3. $C = \dfrac{35}{49} + \dfrac{56}{37}$.
4. $D = \dfrac{256}{47} \times \dfrac{245}{650}$.
5. $E = \dfrac{\frac{4}{6} + \frac{17}{3}}{56} + \dfrac{9}{13}$.

V Construction géométrique des nombres. ◊.

Avant de les considérer comme des nombres les Grecs manipulaient les rationnels en tant que rapport de grandeurs : 3 est par rapport à 6 ce que 1 est par rapport à 2. Nous parlerions, nous, du nombre $\frac{1}{2}$.

De même 6 est à 3 ce que 2 est à 1. Dans ce cas nous parlons nous de 2. Le nombre associé à un rapport est en fait le coefficient multiplicateur qui permet de passer de l'un à l'autre. Or si vous fûtes attentifs au collège qui dit coefficient multiplicateur dit en géométrie ...

Exercice 6. Recherche.

Étant donné A, B et C trois points distincts non-alignés du plan, en utilisant la règle non graduée et le compas, dessinez la parallèle à (AB) passant par C.

Exercice 7. Recherche.

Nous allons dessiner à la règle non graduée et au compas la longueur $\frac{3}{5}$.

1. Dessinez deux points distincts O et I (pas trop éloignés). Nous appellerons désormais 1 la longueur OI.

2. Construisez le point A sur la demi-droite $[OI)$ tel que $OA = 3$.
3. Dessinez un point J tel que OIJ soit isocèle rectangle en O.
4. Construisez le point B sur la demi-droite $[OJ)$ tel que $OB = 5$.
5. Notons M le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant J et (OI). Construisez M.
6. Dites où est dessinée la longueur $\frac{3}{5}$ sur la figure puis justifiez-le.

En considérant dans l'exercice précédent le repère (O,I,J) nous voyons que nous somme désormais capable de dessiner à la règle et au compas tous les points à coordonnées rationnelles.