Les entiers.

I Entiers naturels : $\mathbb{N}$.

Les *entiers naturels* sont les nombres qui servent à dénombrer, à compter. L'ensemble de tous les entiers naturels est :

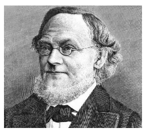
$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

Leopold Kronecker ($XIX^{\text{ième}}$) : « Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme. »

Remarques.

1. La notation $\mathbb{N}$ représente la première lettre de « naturel ».
2. En fait l'ensemble des nombres entiers naturels se construit logiquement.
3. Parmi les mathématiciens qui ont marqué l'étude de l'ensemble des entiers naturels :

Giuseppe Peano.



Hermann Günther Grassmann.

II Entiers relatifs : $\mathbb{Z}$.

Les *entiers relatifs* sont les entiers naturels et leurs *opposés*. L'ensemble de tous les entiers relatifs est :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

Proposition 1

Les nombres entiers relatifs ont une partie décimale nulle.

Remarques :

1. Autrement dit une *écriture décimale infinie* d'un entier ne comporte que des zéros dans la partie décimale. Ainsi : $3 = 3{,}000\ldots$
2. Il existe des nombres qui ne sont pas des entiers. Par exemple $\frac{1}{2}$ n'est pas un entier.
3. La notation $\mathbb{Z}$ (de l'allemand « zahlen » signifiant nombres) fut popularisée par Nicolas Bourbaki.

III Additionner des entiers relatifs.

Exercice 1. ♥

Évaluez les quantités suivantes :

1. $A = -3 + 2$
2. $B = -8 - 7$
3. $C = -(-3) + 4$
4. $D = -13 + (-11)$

IV Multiplier des entiers relatifs.

Les règles rappelées ici fonctionnent en fait pour n'importe quel nombre.

Signe d'un produit.

Le produit de deux nombres de même signe est positif.
Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.
Il est également possible de se représenter les choses comme suit.

Multiplier par un nombre négatif change le signe

$$\boxed{x} \xrightarrow{\quad -2\times \quad} \boxed{-2\times x}$$

Multiplier par un nombre positif ne change pas le signe

$$\boxed{x} \xrightarrow{\quad 3\times \quad} \boxed{3\times x}$$

0 est dit *absorbant* pour la multiplication : quelque soit le nombre a, $0 \times a = 0$.
1 est dit *neutre* pour la multiplication : quelque soit le nombre a, $1 \times a = a$.

Priorités opératoires.

Les règles de priorités pour l'instant se limitent à :

Priorité 1 Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires.

Priorité 2 Les multiplications en allant de gauche à droite.

Priorité 3 Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

Exercice 2. ♥

Évaluez les quantités suivantes :

1. $A = 4 \times (-1)$
2. $B = -1 \times (-1)$
3. $C = 3 \times [-2(3-5)]$
4. $D = (3 - 5 \times (-2))(-1 + (-4) \times 2)$

V Nommer le résultat d'un calcul.

Nous dirons qu'un calcul est une somme (respectivement une différence, respectivement un produit) si la dernière opération effectuée en respectant les priorités opératoires est une addition (respectivement une soustraction, respectivement une multiplication).

À moins de devoir distinguer somme et différence, les résultats d'une addition et d'une soustraction seront très souvent indifféremment appelés des sommes.

Ainsi $2 \times (-2) + 4 \times (3-1)$ et $3 - (4-2) \times (5-2)$ sont des sommes tandis que $(3-1) \times (-6-1)$ est un produit.

Exercice 3. ♥

Indiquez si les calculs suivants sont des sommes ou des produits et effectuez les calculs à la main.

1. $A = 5 + 2 - 5 \times 3$
2. $B = (3+2) \times 5$
3. $C = (3+2) + (2-5)(3+1)$
4. $D = (2+5)(1-3)$

VI Exercices.

Exercice 4. Application.

Calculez en ligne en détaillant.

1. $A = -2 \times (-4+2) - [3 - 2 \times (5-3)]$.
2. $B = -3 \times 2 - 4 + 3 - 7 + 8$.
3. $C = [(-5+7)+6] - 5$.
4. $D = [(3-2) \times (4-1)](5-7)$.
5. $E = -3 \times (-2) \times (-1) \times 4$.
6. $F = -4 \times (2-5) \times (3+1)$.

Exercice 5. Application.

Recopiez et complétez les phrases

1. L'ensemble $\{0;1;2;\dots\}$ est appelé l'ensemble .... et est noté ....
2. L'ensemble $\{\dots;-2;-1;0;1;2;\dots\}$ est appelé l'ensemble .... et est noté ....

Exercice 6. Application.

Sans calculatrice, évaluez les quantités suivantes en détaillant si besoin est.

1. $A = 4 \times (-7)$
2. $B = -3 \times (-4)$
3. $C = 2 \times [-3(5-7)]$
4. $D = -13 + (-5)$
5. $E = -12 - 7$

Exercice 7. Application.

Dites s'il s'agit d'une somme, ou d'un produit puis calculez en ligne en détaillant l'expression

$$F = -3 \times (2-1) - [2 - 2 \times (4-2)].$$

VII Construction géométrique des nombres. ◊

Depuis l'antiquité grecque, et jusque récemment, les mathématiciens étaient appelés des géomètres. Pour devenir ingénieur ou peintre il fallait être d'abord géomètre. Le frontispice de l'école de philosophie de Platon portait l'inscription : « que nul, s'il n'est géomètre, n'entre ici ».

Les grecs raisonnaient de façon géométrique : souvenez-vous de la démonstration géométrique du théorème de Pythagore.

Nous allons voir, dans diverses leçons, comment dessiner les nombres à la façon des grecs. Une première façon consiste à associer un nombre à une longueur.

Rappelons d'abord une règle essentielle du géomètre il n'existe que deux instruments :

— la règle non graduée,
— le compas.

Commençons par revoir quelques techniques élémentaires de dessin en construisant divers polygones. Il s'agit d'un problème classique : quels sont les polygones que l'on peut dessiner uniquement avec la règle et le compas ?

Exercice 8. Recherche.

Les constructions suivantes sont à faire sur feuille blanche non quadrillée (du moins n'utilisez pas le quadrillage) en laissant apparents et en pointillés les traits de construction.

Nous allons construire différents triangles avec uniquement la règle non graduée et le compas.

1. Choisir une unité de longueur.

   Pour décrire les figures nous auront besoin d'indiquer les mesures des côtés. En bons géomètres nous ne pouvons nous contenter de l'arbitraire de la définition du mètre par les physiciens : « la longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide pendant une durée d'un 299 792 458^{e} de seconde ».

   Chacun sera libre de choisir son unité de mesure.

   Placez deux points distincts O et I sur votre feuille. La distance les séparant représentera une longueur de 1 (donc ne les éloignez pas trop, en gros un centimètre).

2. Triangles équilatéral et isocèle.

   (a) Dessinez un segment $[AB]$ de longueur 5.

   (b) Dessinez un triangle équilatéral ABC.

   (c) Dessinez un triangle ABD isocèle en D avec $AD = 4$.

3. Un triangle scalène.

   Dessinez un triangle TUV avec $TU = 4$, $UV = 5$ et $VT = 6$.

4. Un triangle rectangle.

   (a) Dessinez deux points E et F distants de 5.

   (b) Dessinez le point G milieu de $[EF]$.

   (c) Dessinez un point H de sorte que EFH soit rectangle en H.

5. Encore un triangle rectangle.

   (a) Dessinez deux points K et L distants de 6.

   (b) Dessinez un point M de sorte que KLM soit rectangle en K et $KM = 4$.

      Vous pourrez introduire le point L' symétrique de L par rapport à K.

Construction maintenant d'un quadrilatère.

Exercice 9. Recherche.

Après avoir choisir une unité de longueur en dessinant deux points distincts O et I, dessinez un rectangle $NPQR$ avec $NP = 3$ et $PQ = 5$ à la règle non graduée et au compas.

Exercice 10. Recherche.

Construisez un hexagone de côté de longueur 3.

Exercice 11. Recherche.

Nous venons de voir certains polygones constructibles. Plus généralement se pose la question des points qui sont constructibles : quels sont les points de ma feuille que je peux obtenir en faisant des constructions à la règle et au compas en se donnant deux points distincts de référence O et I ?

Exercice 12. Recherche.

Soit OIJ un triangle isocèle-rectangle en O (vous choisirez de l'ordre de 1 cm).
Vos constructions doivent toujours être faites à la règle non-graduée et au compas.

1. Dessinez des points O, I et J.
2. Tracez les droites (OI) et (OJ).
3. Placez des graduations de 1 en 1 sur (OI) et (OJ) en partant de O.

Nous venons de mettre en évidence un repère orthonormé (O,I,J). De façon général nous dirons que (O,I,J) est un *repère orthonormé* si et seulement si OIJ est un triangle isocèle-rectangle en O.

5. Dessinez les points de coordonnées $(3;4)$, puis $(-2;4)$, puis $(-3;-3)$ et enfin $(4;-3)$.

Nous venons de voir que non seulement nous pouvons dessiner certaines figures géométriques classiques mais aussi tous les points à coordonnées entières dans un repère orthonormé (O,I,J).