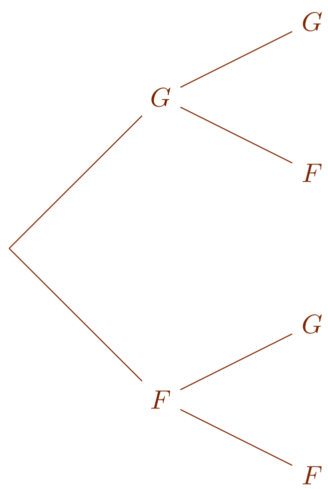
Travail noté du 31/03/2023.

I Exercice 1.

On choisit au hasard une famille parmi les familles de deux enfants, en admettant qu'il y a autant de chance que chaque enfant soit un garçon (G) ou une fille (F). L'issue FG par exemple, indique une famille dont le premier enfant est une fille et dont le deuxième enfant est un garçon.

1. À l'aide d'un arbre, décrire toutes les compositions possibles de familles.

3 points



2. On note les événements A : « le premier enfant est une fille » et B :« la famille a un seul garçon ».

   (a) Calculez $\mathbb{P}(A)$.

   5 points

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   $A = \{FG; FF\}$.
   Il y a équiprobabilité, A est réalisé par 2 issues, l'univers contient 4 issues donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{4}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \tfrac{1}{2}.}$$

(b) Calculez $\mathbb{P}(B)$.

5 *points*

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$B = \{FG; GF\}$.
Il y a équiprobabilité, B est réalisé par 2 issues, l'univers contient 4 issues donc :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2}{4}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \tfrac{1}{2}.}$$

(c) Interprétez $A \cap B$ par une phrase puis calculez $\mathbb{P}(A \cap B)$.

3 *points*

$A \cap B$: « le premier enfant est une fille et la famille n'a qu'un garçon ».

Calculons $\mathbb{P}(A \cap B)$.

$A \cap B = \{FG\}$.
Il y a équiprobabilité, $A \cap B$ est réalisé par 1 issues, l'univers contient 4 issues donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \tfrac{1}{4}.}$$

(d) Calculez $\mathbb{P}(A \cup B)$ puis interprétez $A \cup B$ par une phrase.

5 *points*

Calculons $\mathbb{P}(A \cup B)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{4}$.

$A \cup B$: « le premier enfant et une fille ou la famille n'a qu'un garçon ».

(e) Interprétez $\overline{B}$ par un phrase puis calculez $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$.

3 points

$\overline{B}$: « la famille n'a pas qu'un seul garçon ».

Calculons $\mathbb{P}(\overline{B})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{B}) &= 1 - \mathbb{P}(B)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{1}{2}$.

II Exercice 2.

Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

1. Questions concernant les racines carrées.

(a) Justifiez que $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

2 points

$$\begin{aligned}\sqrt{28} &= \sqrt{2^2 \times 7}\\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{7}\\ &= 2\sqrt{7}\end{aligned}$$

(b) Calculez en détaillant $\sqrt{18} - 5\sqrt{3}$.

3 *points*

$$\begin{aligned}\sqrt{18} - 5\sqrt{3} &= \sqrt{2 \times 3^2} - 5\sqrt{3} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} - 5\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

Et non il n'y pas plus simple : pas de magie.

$$\boxed{\sqrt{18} - 5\sqrt{3} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{3}.}$$

(c) Écrivez $\sqrt{756}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels et b est le plus petit possible.

Avec 1 calculatrice :

$$\boxed{\sqrt{756} = 6\sqrt{21}.}$$

2. Résolvez l'inéquation $\frac{-2x+1}{-3x-6} \geqslant 0$.

* $x \mapsto -2x + 1$ est une fonction affine avec $a = -2$ et $b = 1$. $a < 0$ et la fonction s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.
* $x \mapsto -3x - 6$ est une fonction affine avec $a = -3$ et $b = -6$. $a < 0$ et la fonction s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-6}{-3} = -2$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$-3x-6$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{-2x+1}{-3x-6}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$$\boxed{\mathscr{S} =]-\infty, -2] \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[.}$$

3. Résolvez l'équation $(2x-8)(-7x+1)=0$.

4. Après une augmentation de 76 % le prix d'un article atteint 45 €. Quel était son prix initial ?

6 points

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 76 % est

$$\begin{aligned} CM &= 1 = \frac{t}{100} \\ &= +\frac{76}{100} \\ &= 1{,}76 \end{aligned}$$

Puisque $V_A = CM \times V_D$:

$$\begin{aligned} V_D &= \frac{1}{CM} \times V_A \\ &= \frac{1}{1{,}76} \times 45 \\ &\approx 25{,}568 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

Il coûtait initialement 25,57 €.

5. Soient :
   - S un point du plan,
   - A, B et C trois points alignés dans cet ordre,
   - M le symétrique de B par rapport à S,
   - N le symétrique de C par rapport à S.

   En admettant que B est le projeté orthogonal de N sur (AC), justifiez que $BCMN$ est un rectangle.

4 points

M le symétrique de B par rapport à S et N le symétrique de C par rapport à S donc les diagonales de $BCMN$ se coupent en leur milieu S. Donc $BCMN$ est un parallélogramme.
A, B et C trois points alignés dans cet ordre donc $(AC)=(BC)$. Par conséquent dire que B est le projeté orthogonal de N sur (AC) c'est dire que $\widehat{CBN}$ est droit. Et donc

$BCMN$ est un rectangle.