Seconde 2023/03/03.

I Exercice : fonction et géométrie. 48 points

1. $x = BB'$, $B' \in [BC]$ et $BC = 3$ donc
$$\boxed{x \in [0;3].}$$

2. $ABCD$ est un rectangle donc $AA'D$ est rectangle en A et donc son aire est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AA'D') &= \frac{AA' \times AD'}{2}\\ &= \frac{x \times (3-x)}{2}\end{aligned}$$

De même :
$$\mathscr{A}(CB'C') = \frac{1}{2}x(3-x),$$
et
$$\mathscr{A}(A'BB') = \mathscr{A}(C'DD') = \frac{1}{2}x(5-x).$$
Or

$\mathscr{A}(A'B'C'D') = \mathscr{A}(ABCD) - \mathscr{A}(AA'D') - \mathscr{A}(CB'C') - \mathscr{A}(A'BB') - \mathscr{A}(C'DD')$,

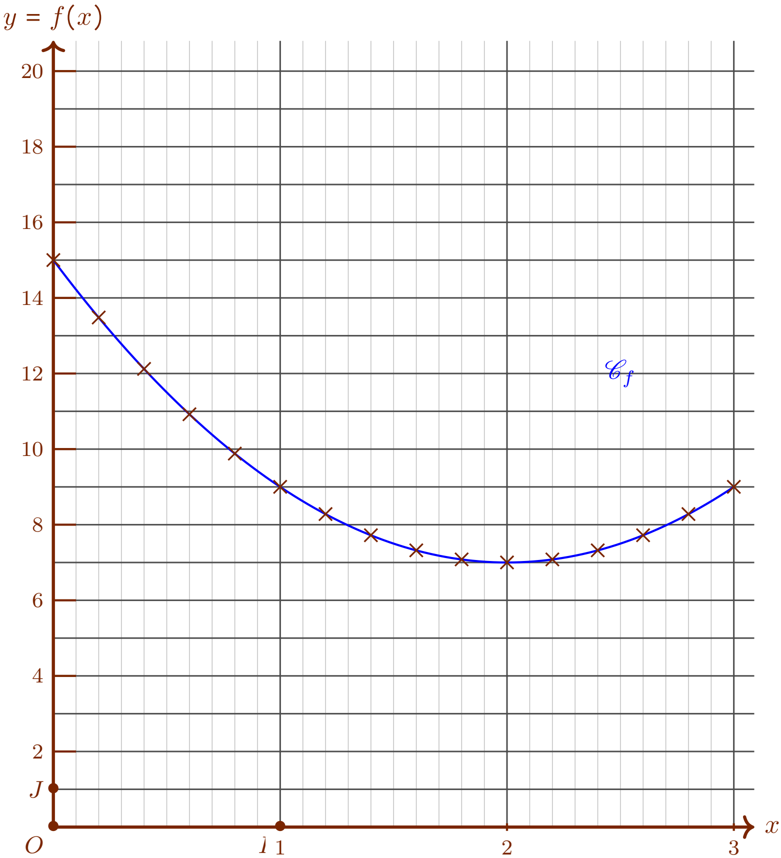
donc

$$\mathscr{A}(A'B'C'D') = AB \times BC - x(5-x) - x(3-x)$$

en développant :

$$\mathscr{A}(ABCD) = 3 \times 5 - -5x + x^2 - 3x + x^2$$

$$\boxed{\mathscr{A}(A'B'C'D') = 2x^2 - 8x + 15.}$$



3. (a)

(b) Puisque $OI \neq OJ$

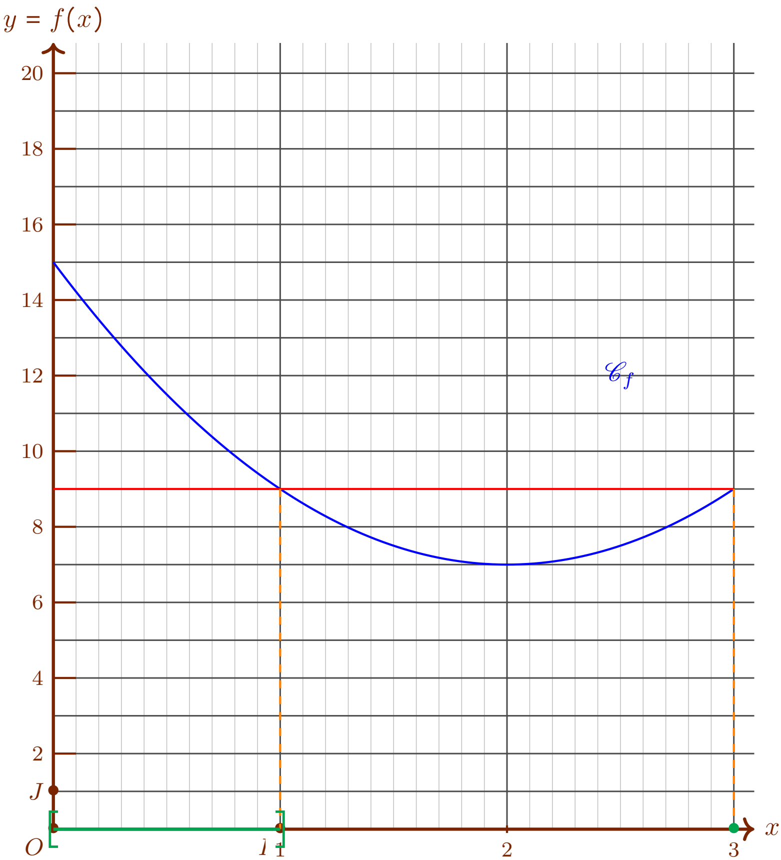
(O,I,J) n'est pas orthonormé.

(c) Pas encore vu en classe donc pas compté dans la note et ne devait pas être fait. À titre anecdotique :

x	0	2	3
f	15 ↘	7 ↗	9

Puis par lecture du tableau de variation :

f admet un minimum égale à 7 qui est atteint en 2.
f admet un maximum égale à 15 qui est atteint en 0.



(d)

L'ensemble des solutions de $f(x) \geqslant 9$ est $[0;1] \cup \{3\}$.

4. (a)

$$f(x) \geqslant 7$$

équivaut successivement à

$$2x^2 - 8x + 15 \geqslant 7$$
$$2x^2 - 8x + 15 - 7 \geqslant 7 - 7$$
$$2x^2 - 8x + 8 \geqslant 0$$

$$\boxed{f(x) \geqslant 7 \text{ équivaut } 2x^2 - 8x + 8 \geqslant 0.}$$

(b) Soit $x \in [0;3]$.

$$\begin{aligned}2(x-2)^2 &= 2\left(x^2 - 2 \times x \times 2\right)\\ &= 2(x^2 - 4x + 4)\\ &= 2 \times x^2 + 2 \times (-4)x + 2 \times 4\\ &= 2x^2 - 8x + 8\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0;3],\ 2(x-2)^2 = 2x^2 - 8x + 8.}$$

(c) $2(x-2)^2$ est toujours positif donc, puisque $f(x) \geqslant 7$ équivaut à $2x^2 - 8x + 8 \geqslant 0$, c'est-à-dire $2(x-2)^2 \geqslant 0$,

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0;3],\ f(x) \geqslant 7.}$$

5. (a)

$$f(x) \geqslant 9$$

équivaut successivement à :

$$2x^2 - 8x + 15 \geqslant 9$$
$$2x^2 - 8x + 15 - 9 \geqslant 9 - 9$$
$$2x^2 - 8x + 6 \geqslant 0$$

$$\boxed{f(x) \geqslant 9 \text{ équivaut à } 2x^2 - 8x + 6 \geqslant 0.}$$

(b) Soit $x \in [0;3]$.

$$\begin{aligned}2(x-1)(x-3) &= 2(x\times x + x\times(-3) + (-1)\times x + (-1)\times(-3)\\ &= 2(x^2-4x+3)\\ &= 2\times x^2 + 2\times(-4)x + 2\times 3\\ &= 2x^2-8x+6\end{aligned}$$

Quelque soit $x \in [0;3]$, $2(x-1)(x-3) = 2x^2-8x+6$.

(c) * $2 > 0$.

* $x \mapsto x-1$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = -1$.
$a > 0$ et $-\frac{b}{a} = -\frac{-1}{1} = 1$.

* $x \mapsto x-3$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = -3$.
$a > 0$ et $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$.

Donc

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(d) D'après la question 5.(a) $f(x) \geqslant 9$ équivaut à $g(x) \geqslant 0$ en se limitant au domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
Or le signe de g a été établi à la question 5.(c) donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 9$ est $(]-\infty,1] \cup [3,+\infty[) \cap \mathscr{D}_f$.
Finalement

l'ensemble des solutions de $f(x) \geqslant 9$ est $[0;1] \cup \{3\}$.

II Exercice géométrie vectorielle. 20 points

1. $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} x_G - x_F \\ y_G - y_F \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} 21-22 \\ 18-20 \end{pmatrix}$.
   $$\boxed{\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.}$$

2. (a) $\overrightarrow{HL}\begin{pmatrix} 15-16 \\ 21-23 \end{pmatrix}$ *i.e.* $\overrightarrow{HL}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
   D'après la question précédente : $\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{FG}$.
   Autrement dit

   $FGLH$ est un parallélogramme.

   (b) Le repère n'est pas orthonormé donc la formule de la distance euclidienne ne s'applique pas (et la norme des vecteurs ne coïncide pas avec la longueur) nous ne pouvons donc pas calculer de longueur.
   Il est impossible de vérifier que les diagonales ont la même longueur ou la présence d'un angle droit grâce au théorème de Pythagore.

   Il est impossible d'affirmer que le quadrilatère est, ou non, un rectangle.

3. (a) Puisque M et N sont les symétriques respectivement de H et F par rapport à G, G est milieu de $[MH]$ et de $[NF]$.
   Ainsi les diagonales de $HFMN$ se coupent en leur milieu et donc :

   $HFMN$ est un parallélogramme.

   (b) Dire que G est le milieu de $[MN]$ équivaut à :
   $$\overrightarrow{HM} = 2\overrightarrow{HG}$$
   Or $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x_M - 16 \\ y_M - 23 \end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} 2(21-16) \\ 2(18-23) \end{pmatrix}$ *i.e.* $2\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HM} = 2\overrightarrow{HG}$ équivaut à
   $$\begin{cases} x_M - 16 = 10 \\ y_M - 23 = -10 \end{cases}$$

Puisque :

$$\begin{aligned} x_M - 16 = 10 &\iff x_M - 16 + 16 = 10 + 16 \\ &\iff x_M = 26 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_M - 23 = -10 &\iff y_M - 23 + 23 = -10 + 23 \\ &\iff y_M = 13 \end{aligned}$$

on en déduit

$$\boxed{M(26; 13).}$$

4. Puisque G est le milieu de $[HM]$, $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{HG}$ et donc

$$\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HG}$$

Donc, d'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{FG}.}$$