Seconde 2023/03/03.

Nom : .... Numéro ....

I Exercice : fonction et géométrie. 48 points

Considérons un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 5$ et $BC = 3$. Plaçons des points A', B', C' et D' respectivement sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ tels que $AA' = BB' = CC' = DD' = x$ où x désigne un nombre.

1. Déterminez l'ensemble des valeurs possibles pour x.

2 points

$x = BB'$, $B' \in [BC]$ et $BC = 3$ donc

$$\boxed{x \in [0;3].}$$

2. ☢ Démontrez que l'aire du quadrilatère $A'B'C'D'$ est égale à : $2x^2 - 8x + 15$.

6 points

$ABCD$ est un rectangle donc $AA'D$ est rectangle en A et donc son aire est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AA'D') &= \frac{AA' \times AD'}{2} \\ &= \frac{x \times (3 - x)}{2}\end{aligned}$$

De même :

$$\mathscr{A}(CB'C') = \frac{1}{2}x(3 - x),$$

et

$$\mathscr{A}(A'BB') = \mathscr{A}(C'DD') = \frac{1}{2}x(5 - x).$$

Or

$$\mathscr{A}(A'B'C'D') = \mathscr{A}(ABCD) - \mathscr{A}(AA'D') - \mathscr{A}(CB'C') - \mathscr{A}(A'BB') - \mathscr{A}(C'DD'),$$

donc

$$\mathscr{A}(A'B'C'D') = AB \times BC - x(5 - x) - x(3 - x)$$

en développant :

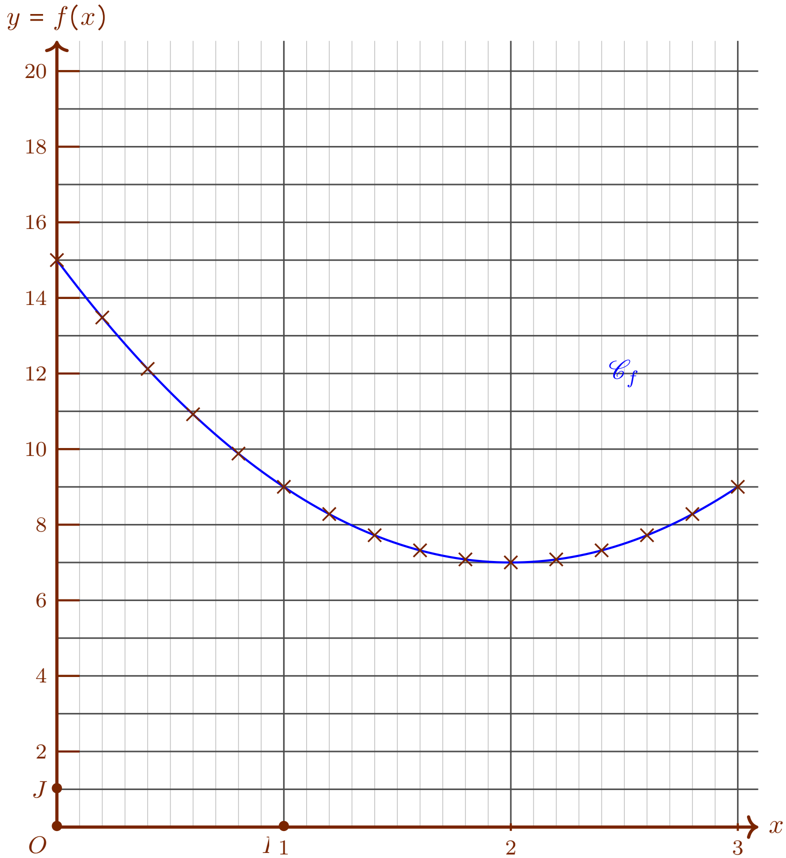
$$\mathscr{A}(ABCD) = 3 \times 5 - -5x + x^2 - 3x + x^2$$

$$\boxed{\mathscr{A}(A'B'C'D') = 2x^2 - 8x + 15.}$$

Désignons par $f : x \mapsto 2x^2 - 8x + 15$ la fonction définie sur $[0;3]$.

3. Dans cette question nous allons nous attacher à la représentation graphique de f.
   Il faudra, le plus souvent, utiliser la calculatrice pour répondre.

   (a) Tracez la courbe représentative de f dans le repère (O,I,J) donné en annexe.
   Vous placerez au moins cinq points de la courbe avant de la tracer.
   5 *points*



(b) Expliquez en quoi le repère (O,I,J) dessiné en annexe est, ou n'est pas, orthonormé.

2 points

Puisque $OI \neq OJ$

(O,I,J) n'est pas orthonormé.

(c) Sans aucune justification donnez le tableau de variation de f puis précisez ses éventuels extrema.

8 points

Pas encore vu en classe donc pas compté dans la note et ne devait pas être fait. À titre anecdotique :

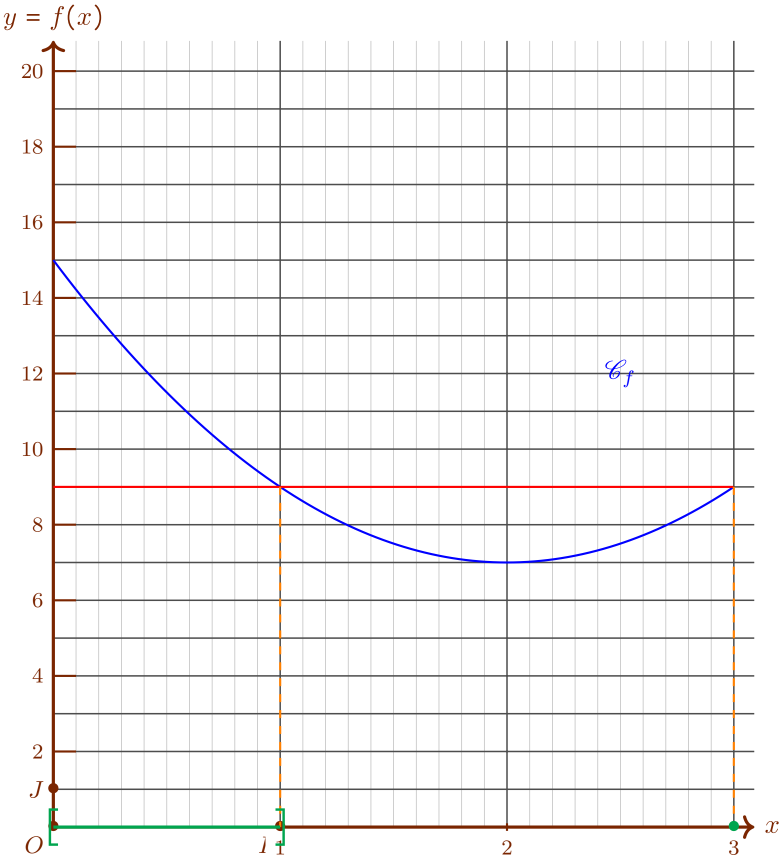
x	0		2		3
f	15	$\searrow$	7	$\nearrow$	9

Puis par lecture du tableau de variation :

f admet un minimum égale à 7 qui est atteint en 2.
f admet un maximum égale à 15 qui est atteint en 0.

(d) Par lecture graphique et en justifiant sur l'annexe donnez l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 9$.

3 points



L'ensemble des solutions de $f(x) \geqslant 9$ est $[0; 1] \cup \{3\}$.

4. Nous souhaitons, dans cette question, démontrer que f est minorée par 7. Autrement dit que, pour tout $x \in [0; 3]$, $f(x) \geqslant 7$.

   (a) Démontrez que $f(x) \geqslant 7$ équivaut à $2x^2 - 8x + 8 \geqslant 0$.

   2 points

$$f(x) \geqslant 7$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 15 &\geqslant 7 \\ 2x^2 - 8x + 15 - 7 &\geqslant 7 - 7 \\ 2x^2 - 8x + 8 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

$f(x) \geqslant 7$ équivaut $2x^2 - 8x + 8 \geqslant 0$.

(b) Démontrez que, pour tout $x \in [0;3]$, $2x^2 - 8x + 8 = 2(x-2)^2$.

3 points

Soit $x \in [0;3]$.

$$\begin{aligned} 2(x-2)^2 &= 2\left(x^2 - 2 \times x \times 2\right) \\ &= 2(x^2 - 4x + 4) \\ &= 2 \times x^2 + 2 \times (-4)x + 2 \times 4 \\ &= 2x^2 - 8x + 8 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0;3]$, $2(x-2)^2 = 2x^2 - 8x + 8$.

(c) Concluez.

3 points

$2(x-2)^2$ est toujours positif donc, puisque $f(x) \geqslant 7$ équivaut à $2x^2 - 8x + 8 \geqslant 0$, c'est-à-dire $2(x-2)^2 \geqslant 0$,

pour tout $x \in [0;3]$, $f(x) \geqslant 7$.

5. Nous souhaitons dans cette question résoudre (algébriquement) l'inéquation $f(x) \geqslant 9$.

   (a) Démontrez que $f(x) \geqslant 9$ équivaut à $2x^2 - 8x + 6 \geqslant 0$.

   2 points

$$f(x) \geqslant 9$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 15 &\geqslant 9 \\ 2x^2 - 8x + 15 - 9 &\geqslant 9 - 9 \\ 2x^2 - 8x + 6 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

$f(x) \geqslant 9$ équivaut à $2x^2 - 8x + 6 \geqslant 0$.

(b) Démontrez que $2x^2 - 8x + 6 = 2(x-1)(x-3)$ pour tout $x \in [0;3]$.

3 points

Soit $x \in [0;3]$.

$$\begin{aligned} 2(x-1)(x-3) &= 2(x \times x + x \times (-3) + (-1) \times x + (-1) \times (-3) \\ &= 2(x^2 - 4x + 3) \\ &= 2 \times x^2 + 2 \times (-4)x + 2 \times 3 \\ &= 2x^2 - 8x + 6 \end{aligned}$$

Quelque soit $x \in [0;3]$, $2(x-1)(x-3) = 2x^2 - 8x + 6$.

(c) Construisez le tableau de signe de la fonction $g : x \mapsto 2(x-1)(x-3)$ définie sur $\mathbb{R}$.

5 points

* $2 > 0$.
* $x \mapsto x - 1$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = -1$.
  $a > 0$ et $-\frac{b}{a} = -\frac{-1}{1} = 1$.
* $x \mapsto x - 3$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = -3$.
  $a > 0$ et $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$.

Donc

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(d) Concluez.

3 *points*

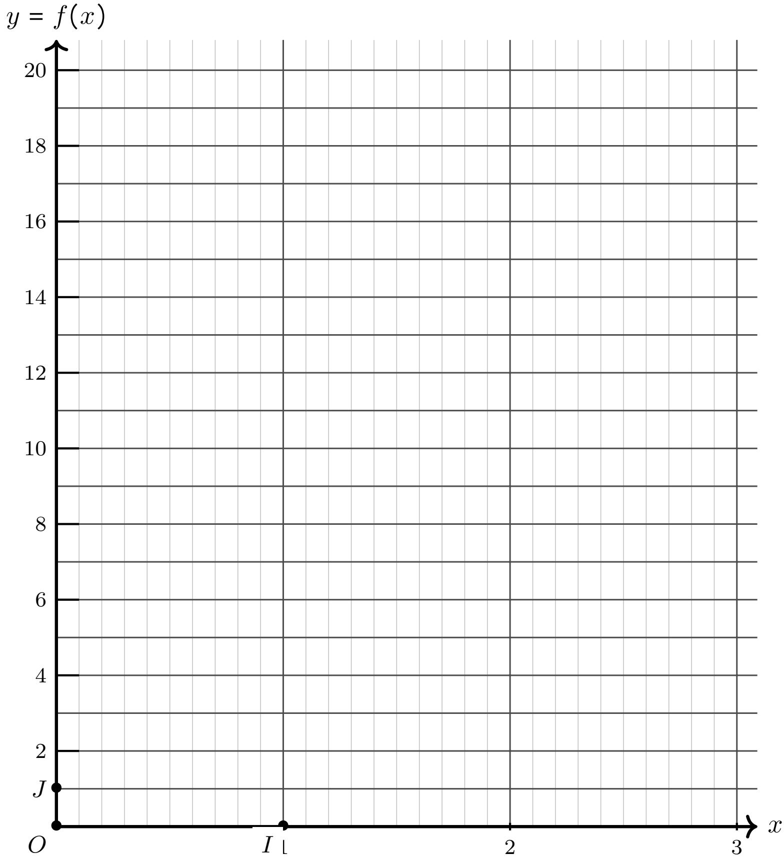
D'après la question 5.(a) $f(x) \geqslant 9$ équivaut à $g(x) \geqslant 0$ en se limitant au domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

Or le signe de g a été établi à la question 5.(c) donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 9$ est $(]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[) \cap \mathscr{D}_f$.

Finalement

$$\text{l'ensemble des solutions de } f(x) \geqslant 9 \text{ est } [0;1] \cup \{3\}.$$

II Annexe.



III Exercice géométrie vectorielle. 20 points

Soient $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan. Dans ce repère on considère les points $F(22;20)$, $G(21;18)$ et $H(16;23)$.

1. Calculez les coordonnées de $\overrightarrow{FG}$.

3 points

$\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} x_G - x_F \\ y_G - y_F \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}21-22\\18-20\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}.$$

2. Soit $L(15;21)$.

   (a) Démontrez que $FGLH$ est un parallélogramme.

   3 *points*

   $\overrightarrow{HL}\begin{pmatrix}15-16\\21-23\end{pmatrix}$ *i.e.* $\overrightarrow{HL}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

   D'après la question précédente : $\overrightarrow{HL}=\overrightarrow{FG}$.
   Autrement dit

   $FGLH$ est un parallélogramme.

   (b) $FGLH$ est-il un rectangle ?

   2 *points*

   Le repère n'est pas orthonormé donc la formule de la distance euclidienne ne s'applique pas (et la norme des vecteurs ne coïncide pas avec la longueur) nous ne pouvons donc pas calculer de longueur.
   Il est impossible de vérifier que les diagonales ont la même longueur ou la présence d'un angle droit grâce au théorème de Pythagore.

   Il est impossible d'affirmer que le quadrilatère est, ou non, un rectangle.

3. Soient M et N les symétriques respectivement de H et F par rapport à G.
   Les deux questions qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre.

   (a) Démontrez que $HFMN$ est un parallélogramme.

   4 *points*

   Puisque M et N sont les symétriques respectivement de H et F par rapport à G, G est milieu de $[MH]$ et de $[NF]$.
   Ainsi les diagonales de $HFMN$ se coupent en leur milieu et donc :

$HFMN$ est un parallélogramme.

(b) Déterminez les cordonnées de M.

4 points

Dire que G est le milieu de $[MN]$ équivaut à :

$$\overrightarrow{HM} = 2\overrightarrow{HG}$$

Or $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x_M - 16 \\ y_M - 23 \end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} 2(21-16) \\ 2(18-23) \end{pmatrix}$ *i.e.* $2\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HM} = 2\overrightarrow{HG}$ équivaut à

$$\begin{cases} x_M - 16 = 10 \\ y_M - 23 = -10 \end{cases}$$

Puisque :

$$\begin{aligned} x_M - 16 = 10 &\iff x_M - 16 + 16 = 10 + 16 \\ &\iff x_M = 26 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_M - 23 = -10 &\iff y_M - 23 + 23 = -10 + 23 \\ &\iff y_M = 13 \end{aligned}$$

on en déduit

$M(26; 13)$.

4. Démontrez que $\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{FG}$.
Un schéma à main levée peut aider.

4 points

Puisque G est le milieu de $[HM]$, $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{HG}$ et donc

$$\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HG}$$

Donc, d'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{FG}.}$$