Travail noté de seconde 07/10/2022.

Durée : 2 fois une heure.
Calculatrice autorisée.

Nom : .... **Prénom** : ....

Exercice 1. 29 points

Dans une région, 54 % des 5 000 donneurs de sang sont des hommes. Parmi eux, 37 % ont moins de 40 ans. Parmi les femmes donnant leur sang, 48 % ont moins de 40 ans.

1. Complétez sur ce sujet le tableau d'effectifs suivant :

8 points

	Hommes	Femmes	Total
Moins de 40 ans			
Plus de 40 ans			
Total			5000

— 1 point par valeur correcte dans le tableau.

Il s'agit d'appliquer des proportions (sous forme de pourcentages) puis de compléter additivement.

	Hommes	Femmes	Total
Moins de 40 ans	999	1104	2103
Plus de 40 ans	1701	1196	2897
Total	2700	2300	5000

2. On note E la population des 5 000 donneurs de sang, F la sous-population des donneurs qui sont des femmes et Q la sous-population des donneurs de moins de 40 ans.

   (a) Calculez, sous la forme d'un nombre décimal, la proportion $P(Q)$ de donneurs de moins de 40 ans

   4 points

— Formule littérale avec les cardinaux.
— Substitution numérique.
— Résultat numérique.
— Forme demandée du résultat.

0,4206.

(b) Calculez, sous la forme d'un pourcentage, la proportion $P(F)$ de femmes parmi les donneurs.

3 *points*

— Formule numérique.
— Résultat numérique.
— Forme demandée du résultat.

46 %.

(c) Définissez par une phrase en français les sous-populations $Q \cap F$ et $Q \cup F$.

2 *points*

— Première phrase (et).
— Seconde phrase (ou).

(d) Calculez la proportion $P(Q \cap F)$ de donneurs qui appartiennent à la sous-population $Q \cap F$ parmi les donneurs interrogés.

2 *points*

— Formule numérique.
— Résultat numérique.

0,2208.

(e) Déduisez de ce qui précède la proportion $P(Q \cup F)$ de donneurs qui appartiennent à la sous-population $Q \cup F$ parmi les donneurs : sous la forme d'un nombre décimal arrondi au millième puis sous la forme d'un pourcentage.

5 *points*

— Formule littérale liant réunion et intersection.
— Substitution numérique.
— Résultat numérique.
— Résultat décimal.
— Résultat en pourcentage.

0,6598.

3. (a) Calculez, sous forme d'un nombre décimal arrondi à 10^{-3}, la proportion $P_Q(F)$ de femmes parmi les donneurs de moins de 40 ans.

3 *points*

— Formule numérique.
— Résultat numérique.
— Forme demandée du résultat.

$\approx 0{,}525$.

(b) Calculez, sous forme d'un nombre décimal arrondi à 10^{-3}, le nombre $P(Q) \times P_Q(F)$ puis interprétez-le dans le contexte de l'exercice.

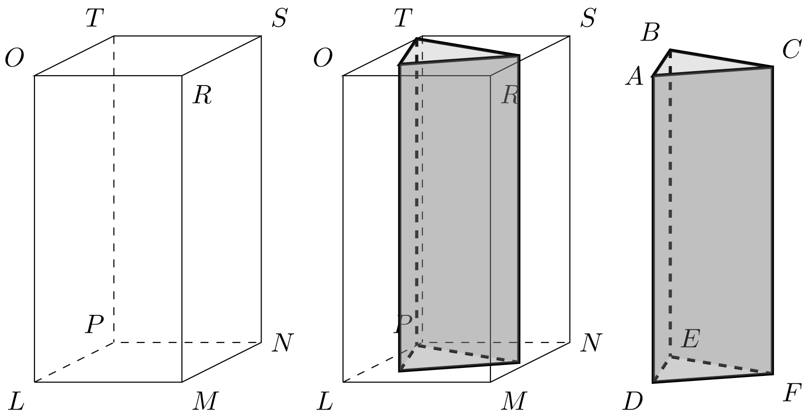
2 points

— Résultat numérique.
— Interprétation.

Exercice 2. 29 points

On considère une pièce en forme de parallélépipède rectangle $LMNPORST$.

On découpe dans cette pièce un prisme à base triangulaire $ABCDEF$ comme représenté ci-après.



L'objectif de ce problème est de calculer le volume du prisme $ABCDEF$.

Toutes les distances sont exprimées en centimètres.

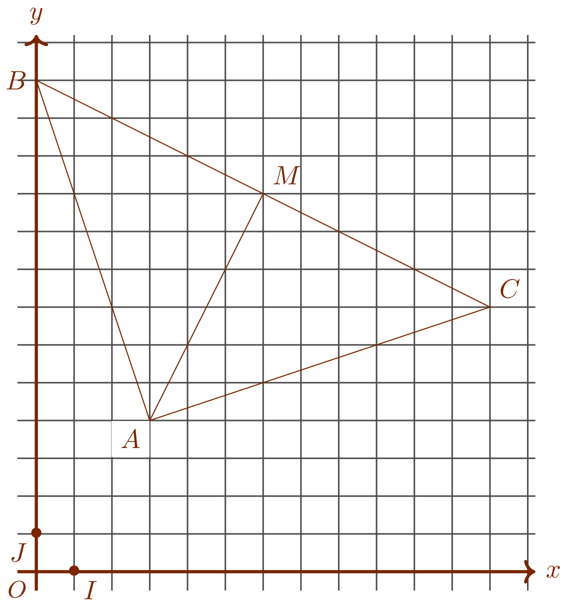
Partie A : calcul de l'aire de ABC.

Pour calculer l'aire de ABC observons la face $ORST$ munie d'un repère orthonormé (O,I,J) comme en **Annexe 1**. Les points A, B et C ont été choisis dans ce repère de sorte que

$$A(3;4), \quad B(0;13) \quad \text{et} \quad C(12;7).$$

1. Dans le repère (O,I,J) de l'**Annexe 1** placez les points A, B et C.

3 points



2. (a) Calculez BC, AB et AC.

6 *points*

— Repère orthonormé.
— Formule littérale.
— Substitution numérique.
— Résultat numérique pour une longueur.
— Résultat numérique pour une deuxième longueur.
— Résultat numérique pour la troisième longueur.

Calculons BC.

Le repère (O,I,J) est orthonormé.

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \\ &= \sqrt{(0-12)^2 + (13-7)^2} \end{aligned}$$

$$BC = 6\sqrt{5}.$$

En procédant de même :

$$AB = 3\sqrt{10}$$
$$AC = 3\sqrt{10}.$$

(b) Que pouvez-vous déduire de la question précédente (sans aucun autre calcul) à propos de la nature de ABC ?

2 *points*

— Égalité intéressante.
— Nature du triangle.

Nous avons établi à la question précédente que $AB = AC$ donc

ABC est isocèle en A.

3. Déterminez le point M milieu de $[BC]$.

5 *points*

— M est le milieu.
— Formule littérale pour abscisse.
— Substitution numérique pour abscisse ou ordonnée.
— Résultat numérique pour abscisse.
— Résultat numérique pour ordonnée.

Déterminons les coordonnées de M.

Puisque M est le milieu de $[BC]$

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_B + x_C}{2} \\ &= \frac{0 + 12}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_B + y_C}{2} \\ &= \frac{13 + 7}{2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\boxed{M(6;10).}$$

4. Quel est le nom de la droite remarquable (MA) pour le triangle ABC ?

1 *points*

— Nom de la droite.

D'après la question précédente (AM) passe par A et le milieu du côté opposé donc

$$\boxed{(AM) \text{ est une médiane de } ABC \text{ issue de } A.}$$

5. Démontrez que M est le projeté orthogonal de A sur (BC).

5 *points*

— Calcul d'un membre de l'égalité de la réciproque du théorème de Pythagore.
— Calcul de l'autre membre de l'égalité de la réciproque du théorème de Pythagore.
— Égalité de Pythagore.

— Évoquer avec a propos la réciproque du théorème de Pythagore.
— Conclusion.
— 5 points pour parler de la hauteur du triangle isocèle.

Démontrons que $(AM) \perp (BC)$.

(AM) est la médiane issue de A, or nous savons que ABC est isocèle en A, donc la médiane (AM) est aussi une auteur du triangle et par conséquent $(AM) \perp (BC)$.

M est le projeté orthogonal de M sur (BC).

6. Calculez l'aire $\mathscr{A}$ de ABC.

4 points

— Formule littérale avec les notations de l'énoncé.
— Valeur numérique de AM.
— Substitution dans la formule.
— Résultat.

Calculons $\mathscr{A}$.

Nous avons établi lors de la question précédente que (AM) est la hauteur issue de A donc :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2} AM \times BC$$

Or nous calculons aisément : $AM = 3\sqrt{5}$ donc :

$$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times 6\sqrt{5}$$

$\mathscr{A} = 45 \text{ cm}^2$.

Partie B : calcul du volume de $ABCDEF$.

Calculez le volume $\mathscr{V}$ de $ABCDEF$ sachant que $OL = 27$ cm.

3 points

— Formule littérale.
— Formule numérique.
— Résultat numérique.

Calculons $\mathscr{V}$.

$ABCDEF$ est un prisme donc

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= OL \times \mathscr{A}\\ &= 27 \times 45\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V} = 1\,215 \text{ cm}^3.}$$

Exercice 3. 12 points

On s'intéresse à l'évolution du prix d'une matière première, en euro par tonne, depuis 2014. Le tableau ci-dessous donne le prix de cette matière première entre 2014 et 2019.

Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Prix en euro	248	188,5	237	?	216,5	231,7
Taux d'évolution par rapport à l'année précédente en pourcentage		-24	?	-13	5	7

1. Déterminez le coefficient multiplicateur correspondant à l'évolution entre 2014 et 2015.

3 points

— Formule littérale.
— Formule numérique, substitution.
— Résultat.

Calculons le coefficient multiplicateur CM_1 de l'évolution entre 2014 et 2015.

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1 + \frac{t_1}{100} \\ &= 1 + \frac{-24}{100} \end{aligned}$$

$$\boxed{CM_1 = 0{,}76.}$$

2. Calculez le taux d'évolution du prix entre 2015 et 2016 au centième près.

5 points

— Formule littérale.
— Formule numérique, substitution.
— Résultat.
— Respect de l'arrondi.
— Phrase de conclusion.

Calculons le taux d'évolution t_2 entre 2015 et 2016.

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 \\ &= \frac{237 - 188{,}5}{188{,}5} \times 100 \\ &\approx 25{,}729 \end{aligned}$$

Entre 2015 et 2016 le prix à augmenté de 25,73 %.

3. Calculez le prix en euro en 2017.

4 points

— Calcul du coefficient multiplicateur.
— Formule littérale pour la valeur d'arrivée.
— Formule numérique, substitution.
— Résultat.

ou

— Application du pourcentage.
— Résultat du montant de l'augmentation.
— Ajout au montant initial.
— Résultat.

Calculons le prix V_A en 2017.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 13 % est

$$\begin{aligned} CM_3 &= 1 + \frac{t_3}{100} \\ &= 1 + \frac{-13}{100} \\ &= 0{,}87 \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} V_A &= CM \times V_D \\ &= 0{,}87 \times 237 \\ &= 206{,}19 \end{aligned}$$

Le prix en 2017 est de 206,19 €.

Exercice 4. 11 points

Dans cet exercice les étapes des calculs numériques doivent être détaillées.

1. Donnez sous forme irréductible $A = \dfrac{4}{15} + \dfrac{1}{10}$.

4 points

— Mise en évidence de la mise au même dénominateur.
— Somme correcte.
— Décomposition en facteurs premiers.
— Résultat.

$$\begin{aligned} A &= \frac{4 \times 10 + 15 \times 1}{15 \times 10} \\ &= \frac{55}{3 \times 5 \times 2 \times 5} \\ &= \frac{5 \times 11}{2 \times 3 \times 5^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \tfrac{11}{30}.}$$

2. Donnez sous forme irréductible $B = \dfrac{27}{8} \times \dfrac{40}{63}$.

3 points

— Mise en évidence du produit des numérateurs et dénominateurs.
— Décomposition en facteurs premiers.
— Résultat.

$$\begin{aligned} B &= \frac{27 \times 40}{8 \times 63} \\ &= \frac{3^3 \times 2^3 \times 5}{2^3 \times 3^2 \times 7} \end{aligned}$$

$$\boxed{B = \tfrac{15}{7}.}$$

3. Donnez sous la forme 2^a, avec $a \in \mathbb{Z}$, le nombre $C = \dfrac{\left(2^{-3}\right)^4}{2^7 \times 2^{15}}$.

4 points

— Règle puissance d'un nombre lui-même à une puissance.
— Règle produit de deux nombres à la même puissance.
— Règle inverse d'une puissance.
— Résultat.

$$\begin{aligned} C &= \frac{2^{-3\times4}}{2^{7+15}} \\ &= \frac{2^{-12}}{2^{22}} \\ &= 2^{-12} \times 2^{-22} \\ &= 2^{-12-22} \end{aligned}$$

$$C = 2^{-34}.$$

Exercice 5. 8 points

Répondez directement sur le sujet en entourant la seule bonne réponse.

1. $]-\infty, -3[\cup]-5; 2] =$

   a) $[-3; -5]$.   b) $]-5; -3[$.   c) $]-\infty, 2]$.   d) $]-\infty, 2[$.

$]-\infty, -3[\cup]-5; 2] =]-\infty, 2]$

Réponse c.

2. Indiquez l'ensemble des solutions de l'équation

$$(3x-2)(4-x) = 0.$$

a) $\{2;-4\}$. b) $\left\{\frac{3}{2};-4\right\}$. c) $\left\{\frac{2}{3};4\right\}$. d) $\{6;4\}$.

Réponse c.

3. Indiquez l'ensemble des solutions de l'équation

$$\frac{-5x+2}{3x+1}=0.$$

a) $\{-3\}$. b) $\left\{\frac{2}{5}\right\}$. c) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$. d) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$.

Réponse b.

4. Indiquez la valeur renvoyée par le programme Python suivant :

```
a=1
b=6
while a<6:
    a=a+2
print(a)
```

a) 4. b) 5. c) 6. d) 7.

Réponse d.

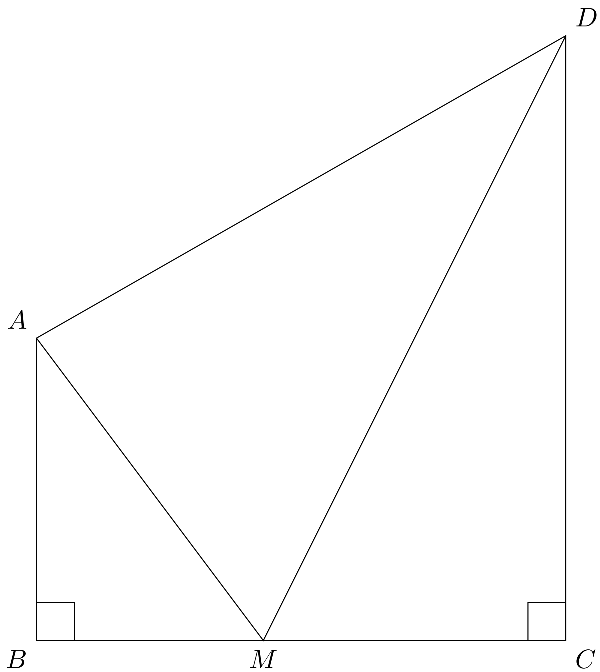
Exercice 6. 20 points

On considère un trapèze $ABCD$ rectangle en B et C tels que $AB = 4$, $BC = 7$ et $CD = 8$.

L'objectif de cet exercice est de dessiner un triangle inscrit dans le trapèze dont l'aire soit la moitié de celle du trapèze.

Partie A : un cas particulier.

Soit M le point de $[BC]$ tel que $BM = 3$.



1. Calculez l'aire, $\mathscr{A}_1$, de ABM.

4 points

— Justification formule, hauteur.
— Formule littérale.
— Formule numérique.
— Résultat.

Calculons $\mathscr{A}_1$.

ABM est rectangle en B donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1 &= \frac{AB \times BM}{2}\\ &= \frac{4 \times 3}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = 6.}$$

2. En admettant que l'aire de DCM est $\mathscr{A}_2 = 16$ et que celle du trapèze $ABCD$ est $\mathscr{A}_3 = 42$, déduisez des questions précédente que l'aire du triangle MAD est $\mathscr{A}_T = 20$.

   2 *points*

— Idée d'enlever les morceaux.
— Résultat.

Calculons $\mathscr{A}_T$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_T &= \mathscr{A}_3 - \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2\\ &= 42 - 6 - 16\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_T = 20.}$$

3. Calculez la proportion que représente l'aire de MAD par rapport à l'aire du trapèze $ABCD$.
   Vous donnerez le résultat sous forme d'une fraction irréductible en justifiant.

   3 *points*

— Formule de proportion numérique ou littérale.
— décompositions en facteurs premiers.
— Forme irréductible du résultat.

Calculons la proportion demandée p.

$$\begin{aligned} p &= \frac{\mathscr{A}_T}{\mathscr{A}_3} \\ &= \frac{20}{42} \\ &= \frac{2^2 \times 5}{2 \times 3 \times 7} \end{aligned}$$

$$\boxed{p = \frac{10}{21}.}$$

Partie B : le cas général.

Le point M est maintenant considéré comme mobile sur le segment $[BC]$.
La longueur BM est donc maintenant variable et nous noterons $BM = x$.

1. Exprimez l'aire, $\mathscr{A}_1$, de ABM en fonction de x.

3 points

— 3 points pour la formule littérale justifiée ou non.

Calculons $\mathscr{A}_1$.

ABM est rectangle en B donc

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_1 &= \frac{AB \times BM}{2} \\ &= \frac{4 \times x}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = 2x.}$$

2. On admet que l'aire de MAD, exprimée en fonction de x est

$$\mathscr{A}_T = 42 - 2x - 4(7 - x).$$

Justifiez que pour que l'aire de MAD représente la moitié de celle de $ABCD$ il faut que x vérifie

$$2x + 14 = 21.$$

3 points

— Faire apparaître l'égalité.
— Développer.
— Réduire et ordonner.

DCM est rectangle en C donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_2 &= \frac{MC \times CD}{2}\\ &= \frac{(7 - x) \times 8}{2}\\ &= 4(7 - x)\end{aligned}$$

Comme précédemment :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_T &= \mathscr{A}_3 - \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2\\ &= 42 - 2x - 4(7 - x)\end{aligned}$$

Dire que l'aire de MAD représente la moitié de celle de $ABCD$ équivaut successivement à

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_T &= \frac{1}{2} \times 42\\ 42 - 2x - 4(7 - x) &= 21\\ 42 - 2x - 28 + 4x &= 21\\ 2x + 14 &= 21\end{aligned}$$

Ainsi x est bien solution de l'équation $2x + 14 = 21$.

3. Résolvez l'équation :

$$2x + 14 = 21.$$

4 points

— Soustraire de chaque côté.
— Diviser de chaque côté.
— Trouver la réponse.
— Donner l'ensemble des solutions.

Résolvons l'équation proposée.

$2x + 14 = 21$ équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 2x + 14 &= 21 \\ 2x + 14 - 14 &= 21 - 14 \\ 2x &= 7 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{7}{2} \\ x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{7}{2}\right\}$.

4. Répondez au problème.

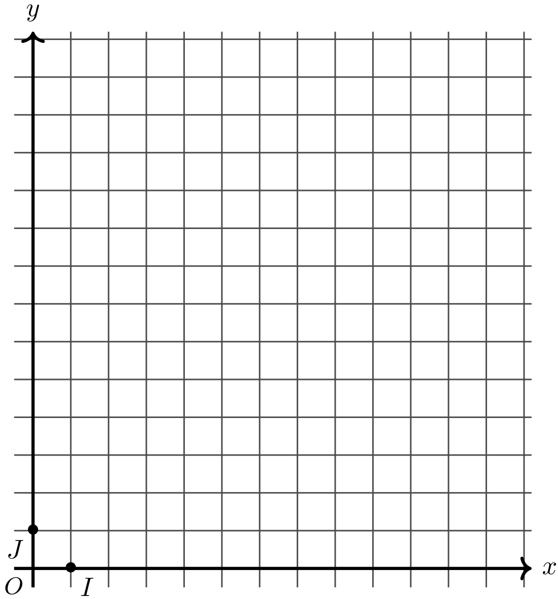
1 points

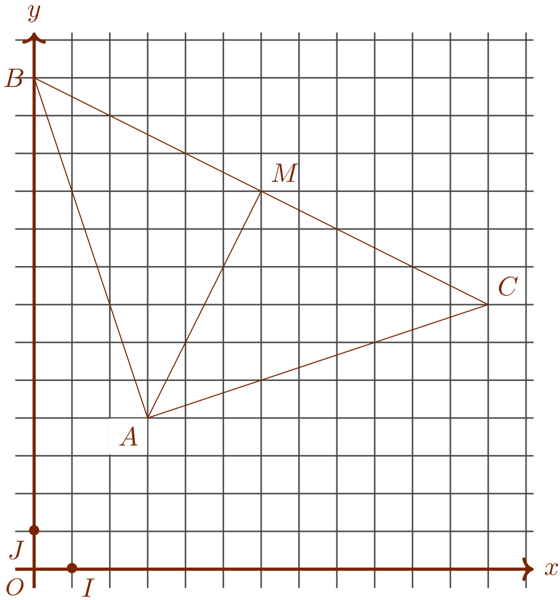
— Faire le lien entre ce qui a été trouvé et l'objectif de l'exercice.

Pour que le triangle fasse la moitié de l'aire du trapèze il faut placer M au milieu du segment $[BC]$.

Annexes.

Annexe 1.




y
B
M
C
A
J
O
I
x