Devoir sur table. 09/09/2022.

Exercice 1.

1.

   — 4 en tout ou rien.

Réponse d.

2.

   — 2 en tout ou rien.

Réponse b.

3.

   — 4 en tout ou rien.

Réponse c.

Exercice 2.

1. (a)

   — 1 mise au même dénominateur.
   — 1 somme correcte.
   — 1 justification forme irréductible avec décomposition en facteurs premiers.
   — Résultat.

$$\begin{aligned} A &= \frac{20}{15} + \frac{2\times 3}{5\times 3} \\ &= \frac{20+6}{15} \\ &= \frac{26}{15} \\ &= \frac{2\times 13}{3\times 5} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \tfrac{26}{15}.}$$

(b)

— 1 produit des numérateurs et dénominateurs.
— 1 décomposition en facteurs premier du numérateur.
— 1 décomposition en facteurs premier du dénominateur.
— 1 résultat.

$$\begin{aligned} B &= \frac{90}{28} \times \frac{42}{15} \\ &= \frac{90\times 42}{28\times 15} \\ &= \frac{2\times 3^2 \times 5\times 2\times 3\times 7}{2^2\times 7\times 3\times 5} \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\boxed{B = 9.}$$

(c)

— 1 écriture en produit.
— 1 produit des numérateurs et dénominateurs.
— 1 décomposition en facteurs premier du numérateur.
— 1 résultat.

$$\begin{aligned} C &= \frac{24}{35} \times \frac{50}{12} \\ &= \frac{24 \times 50}{35 \times 12} \\ &= \frac{2^3 \times 3 \times 2 \times 5^2}{5 \times 7 \times 2^2 \times 3} \\ &= \end{aligned}$$

$$\boxed{C = \frac{20}{7}.}$$

(d)

— 1 décomposition de 4 ou 2 mis au carré.
— 1 règle des puissances.
— 1 simplification.
— 1 résultat.

Erreur de frappe sur les puissances qui rend le calcul final impossible.

$$\begin{aligned} D &= \frac{3 \times 4 \times 4^{37}}{\left(2^2\right)^{17}} \\ &= \frac{3 \times 4^{38}}{4^{17}} \\ &= 3^{38-17} \\ &= 3 \times 4^{21} \qquad = \ldots \end{aligned}$$

2. (a)

— 1 mise au même dénominateur.
— 1 développement du premier terme du numérateur.
— 1 développement du second terme du numérateur.
— 1 prise en compte du moins du numérateur (parenthèses).
— 1 développement du dénominateur.
— 1 réduction et développement du numérateur.
— 1 réduction du dénominateur.

— 1 résultat.

Calculons une expression fractionnaire développée de $f(x)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x \times (x+2) - (x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} \\
&= \frac{x \times x + x \times 2 - (x \times x + x \times 1 + (-1) \times x + (-1) \times x)}{x \times x + x \times 2 + 1 \times x + 1 \times 2} \\
&= \frac{x^2 + 2x - (x^2 + x - x - 1)}{x^2 + 2x + x + 2} \\
&= \frac{x^2 + 2x - (x^2 - 1)}{x^2 + 3x + 2} \\
&= \frac{x^2 + 2x - x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}.}$$

(b)

— 1 règle du produit de fraction.
— 1 développement du numérateur.
— 1 développement du dénominateur.
— 1 réduire numérateur et dénominateur.
— 1 résultat.

Calculons une expression fractionnaire développée de $g(x)$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{(x-3) \times (x+3)}{(x-1) \times (x-2)} \\
&= \frac{x \times x + x \times 3 + (-3) \times x + (-3) \times 3}{x \times x + x \times (-2) + (-1) \times x + (-1) \times (-2)} \\
&= \frac{x^2 + 3x - 3x - 9}{x^2 - 2x - x + 2}
\end{aligned}$$

$$g(x) = \frac{x^2-9}{x^2-3x+2}.$$

3. (a)

— 1 regrouper les x.
— 1 réduire.
— 1 additionner des deux côtés.
— 1 diviser des deux côtés.
— 1 solution.
— 1 ensemble des solutions.

Résolvons (E_1).

C'est une équation du premier degré dont la méthode de résolution est bien connue et se fait par équivalences successives.
(E_1) équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 2x + 3 + 4x &= 6 - 4x + 4x \\ 6x + 3 &= 6 \\ 6x + 3 - 3 &= 6 - 3 \\ 6x &= 3 \\ \frac{6x}{6} &= \frac{3}{6} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

(b)

— 1 reconnaître une identité remarquable.
— 1 factorisation.
— 1 produit nul.
— 1 résolution d'une équation du premier degré.
— 1 résolution de l'autre équation du premier degré.
— 1 l'ensemble des solutions.

Résolvons (E_2).

(E_2) n'est pas une équation du premier degré. Deux options :
- une simplification évidente permet de se ramener à une équation du premier degré,
- se ramener à une équation produit nul (donc se ramener à une égalité à 0 puis factoriser).

(E_2) équivaut successivement à

$$\begin{aligned}(2x)^2 - 7^2 &= 0\\ (2x-7)(2x+7) &= 0\end{aligned}$$

Nous avons une équation produit nul formée de facteurs du premier degré, nous pouvons donc continuer à travailler par équivalences.

$$\begin{array}{rcl} 2x-7=0 & \text{ou} & 2x+7=0\\ 2x-7+7=0+7 & \text{ou} & 2x+7-7 \qquad\qquad = 0-7\\ 2x=7 & \text{ou} & 2x=-7\\ \dfrac{2x}{2}=\dfrac{7}{2} & \text{ou} & \dfrac{2x}{2}=\dfrac{-7}{2}\\ x=\dfrac{7}{2} & \text{ou} & x=-\dfrac{7}{2}\end{array}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \left\{\tfrac{7}{2}, -\tfrac{7}{2}\right\}.}$$

4.

- 1 formule volume cylindre.
- 1 formule volume parallélépipède rectangle.
- 1 mise en équation.
- 1 diviser des deux côtés.
- 1 isoler r^2.
- 1 justifier $r \geqslant 0$.
- 1 résultat.

Déterminons r.

D'après l'énoncé r est un nombre positif qui vérifie :

$$2\pi r^2 = 3 \times 2 \times 5.$$

Le fait que la solution doivent être prise dans $[0, +\infty[$ incite à faire un raisonnement par analyse-synthèse.

* Si r est solution du problème alors nous avons successivement

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi r^2}{2} &= \frac{3\times 2\times 5}{2}\\
\pi r^2 &= 15
\end{aligned}$$

Ce n'est pas une équation du premier degré il faut donc se ramener à une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
\pi r^2 - 15 &= 15 - 15\\
\pi r^2 - 15 &= 0\\
\left(\sqrt{\pi}r\right)^2 - \sqrt{15}^2 &= 0\\
\left(\sqrt{\pi}r - \sqrt{15}\right)\left(\sqrt{\pi}r + \sqrt{15}\right) &= 0\\
\sqrt{\pi}r - \sqrt{15} = 0 \quad &\text{ou} \quad \sqrt{\pi}r + \sqrt{15} = 0\\
\sqrt{\pi}r - \sqrt{15} + \sqrt{15} = 0 + \sqrt{15} \quad &\text{ou} \sqrt{\pi}r + \sqrt{15} - \sqrt{15} = 0 - \sqrt{15}\\
\sqrt{\pi}r = \sqrt{15} \quad &\text{ou} \quad \sqrt{\pi}r = -\sqrt{15}\\
\frac{\sqrt{\pi}r}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}} \quad &\text{ou} \quad \frac{\sqrt{\pi}r}{\sqrt{\pi}} = \frac{-\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

Donc $r \in \left\{\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}, -\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}\right\}$.

* Comme $r \geqslant 0$ nous n'avons qu'une solution possible.

$$\boxed{r = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}.}$$