

Devoir sur table. 09/09/2022.

Durée : 2 heures.

Devoir sans calculatrice hormis le dernier exercice qui sera rendu sur une feuille séparée.

Exercice 1.

Entourez sur ce sujet l'unique bonne réponse.

1. Quel est le programme qui affiche -4 ?

a) b)

```
a=2
b=4
print(a**3/b)
```

```
a=1
b=3
print(2*(b-a))
```

c) d)

```
a=8
b=2
print(b-a**2)
```

```
a=-1
b=-2
print(a*b*a-2)
```

4 points

— 4 en tout ou rien.

Réponse d.

2. L'ensemble des solutions de l'équation $-2x + 3 = -4x - 1$ est

a) $\frac{2}{3}$. b) $\{-2\}$.

c) $-\frac{2}{3}$. d) $\{-1\}$.

— 2 en tout ou rien.

Réponse b.

3. Donnez la valeur de u à la fin du programme en Python suivant :

```
u=0
v=2
while v < 64:
    u=u+1
    v=v**2
```

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

— 4 en tout ou rien.

Réponse c.

Exercice 2.

1. Donnez les nombres rationnels suivants sous forme irréductible.

a) $A = \frac{20}{15} + \frac{2}{5}$

b) $B = \frac{90}{28} \times \frac{42}{15}$

$$c) C = \frac{\frac{24}{35}}{\frac{12}{50}}$$

$$d) D = \frac{12 \times 4^{37}}{(2^{17})^2}$$

(a)

- 1 mise au même dénominateur.
- 1 somme correcte.
- 1 justification forme irréductible avec décomposition en facteurs premiers.
- Résultat.

$$\begin{aligned} A &= \frac{20}{15} + \frac{2 \times 3}{5 \times 3} \\ &= \frac{20 + 6}{15} \\ &= \frac{26}{15} \\ &= \frac{2 \times 13}{3 \times 5} \end{aligned}$$

$$A = \frac{26}{15}$$

(b)

- 1 produit des numérateurs et dénominateurs.
- 1 décomposition en facteurs premier du numérateur.
- 1 décomposition en facteurs premier du dénominateur.
- 1 résultat.

$$\begin{aligned} B &= \frac{90}{28} \times \frac{42}{15} \\ &= \frac{90 \times 42}{28 \times 15} \\ &= \frac{2 \times 3^2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7}{2^2 \times 7 \times 3 \times 5} \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$B = 9.$$

(c)

- 1 écriture en produit.
- 1 produit des numérateurs et dénominateurs.
- 1 décomposition en facteurs premier du numérateur.
- 1 résultat.

$$\begin{aligned} C &= \frac{24}{35} \times \frac{50}{12} \\ &= \frac{24 \times 50}{35 \times 12} \\ &= \frac{2^3 \times 3 \times 2 \times 5^2}{5 \times 7 \times 2^2 \times 3} \\ &= \end{aligned}$$

$$C = \frac{20}{7}.$$

(d)

- 1 décomposition de 4 ou 2 mis au carré.
- 1 règle des puissances.
- 1 simplification.
- 1 résultat.

Erreur de frappe sur les puissances qui rend le calcul final impossible.

$$\begin{aligned} D &= \frac{3 \times 4 \times 4^{37}}{(2^2)^{17}} \\ &= \frac{3 \times 4^{38}}{4^{17}} \\ &= 3^{38-17} \\ &= 3 \times 4^{21} \qquad = \dots \end{aligned}$$

2. Donnez les expressions littérales suivantes sous forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des expressions développées, ordonnées et réduites.

13 points

a) $f(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x+2}$.

b) $g(x) = \frac{x-3}{x-1} \times \frac{x+3}{x-2}$.

(a)

- 1 mise au même dénominateur.
- 1 développement du premier terme du numérateur.
- 1 développement du second terme du numérateur.
- 1 prise en compte du moins du numérateur (parenthèses).
- 1 développement du dénominateur.
- 1 réduction et développement du numérateur.
- 1 réduction du dénominateur.
- 1 résultat.

Calculons une expression fractionnaire développée de $f(x)$.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x \times (x+2) - (x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} \\
 &= \frac{x \times x + x \times 2 - (x \times x + x \times 1 + (-1) \times x + (-1) \times x)}{x \times x + x \times 2 + 1 \times x + 1 \times 2} \\
 &= \frac{x^2 + 2x - (x^2 + x - x - 1)}{x^2 + 2x + x + 2} \\
 &= \frac{x^2 + 2x - (x^2 - 1)}{x^2 + 3x + 2} \\
 &= \frac{x^2 + 2x - x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2}
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$$

(b)

- 1 règle du produit de fraction.

- 1 développement du numérateur.
- 1 développement du dénominateur.
- 1 réduire numérateur et dénominateur.
- 1 résultat.

Calculons une expression fractionnaire développée de $g(x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x-3) \times (x+3)}{(x-1) \times (x-2)} \\ &= \frac{x \times x + x \times 3 + (-3) \times x + (-3) \times 3}{x \times x + x \times (-2) + (-1) \times x + (-1) \times (-2)} \\ &= \frac{x^2 + 3x - 3x - 9}{x^2 - 2x - x + 2} \end{aligned}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x + 2}.$$

3. Résolvez les équations :

12 points

(a) $(E_1) : 2x + 3 = 6 - 4x.$

- 1 regrouper les x .
- 1 réduire.
- 1 additionner des deux côtés.
- 1 diviser des deux côtés.
- 1 solution.
- 1 ensemble des solutions.

Réolvons (E_1) .

C'est une équation du premier degré dont la méthode de résolution est bien connue et se fait par équivalences successives.

(E_1) équivaut successivement à :

$$2x + 3 + 4x = 6 - 4x + 4x$$

$$6x + 3 = 6$$

$$6x + 3 - 3 = 6 - 3$$

$$6x = 3$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{3}{6}$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

(b) $(E_2) : 4x^2 - 49 = 0$.

- 1 reconnaître une identité remarquable.
- 1 factorisation.
- 1 produit nul.
- 1 résolution d'une équation du premier degré.
- 1 résolution de l'autre équation du premier degré.
- 1 l'ensemble des solutions.

Réolvons (E_2) .

(E_2) n'est pas une équation du premier degré. Deux options :

- une simplification évidente permet de se ramener à une équation du premier degré,
- se ramener à une équation produit nul (donc se ramener à une égalité à 0 puis factoriser).

(E_2) équivaut successivement à

$$(2x)^2 - 7^2 = 0$$

$$(2x - 7)(2x + 7) = 0$$

Nous avons une équation produit nul formée de facteurs du premier degré, nous pouvons donc continuer à travailler par équivalences.

$$\begin{aligned}
 2x - 7 = 0 & \quad \text{ou} \quad 2x + 7 = 0 \\
 2x - 7 + 7 = 0 + 7 & \quad \text{ou} \quad 2x + 7 - 7 & & = 0 - 7 \\
 2x = 7 & \quad \text{ou} \quad 2x = -7 \\
 \frac{2x}{2} = \frac{7}{2} & \quad \text{ou} \quad \frac{2x}{2} = \frac{-7}{2} \\
 x = \frac{7}{2} & \quad \text{ou} \quad x = -\frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est $\left\{\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right\}$.

4. Un cylindre de rayon r et de hauteur 2 a même volume qu'un parallélépipède de longueur 3, de largeur 2 et de profondeur 5.
Déterminez r .

7 points

- 1 formule volume cylindre.
- 1 formule volume parallélépipède rectangle.
- 1 mise en équation.
- 1 diviser des deux côtés.
- 1 isoler r^2 .
- 1 justifier $r \geq 0$.
- 1 résultat.

Déterminons r .

D'après l'énoncé r est un nombre positif qui vérifie :

$$2\pi r^2 = 3 \times 2 \times 5.$$

Le fait que la solution doivent être prise dans $[0, +\infty[$ incite à faire un raisonnement par analyse-synthèse.

* Si r est solution du problème alors nous avons successivement

$$\frac{2\pi r^2}{2} = \frac{3 \times 2 \times 5}{2}$$

$$\pi r^2 = 15$$

Ce n'est pas une équation du premier degré il faut donc se ramener à une équation produit nul.

$$\pi r^2 - 15 = 15 - 15$$

$$\pi r^2 - 15 = 0$$

$$(\sqrt{\pi r})^2 - \sqrt{15}^2 = 0$$

$$(\sqrt{\pi r} - \sqrt{15})(\sqrt{\pi r} + \sqrt{15}) = 0$$

$$\sqrt{\pi r} - \sqrt{15} = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{\pi r} + \sqrt{15} = 0$$

$$\sqrt{\pi r} - \sqrt{15} + \sqrt{15} = 0 + \sqrt{15} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\pi r} + \sqrt{15} - \sqrt{15} = 0 - \sqrt{15}$$

$$\sqrt{\pi r} = \sqrt{15} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\pi r} = -\sqrt{15}$$

$$\frac{\sqrt{\pi r}}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{\pi r}}{\sqrt{\pi}} = \frac{-\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}$$

Donc $r \in \left\{ \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}, -\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}} \right\}$.

* Comme $r \geq 0$ nous n'avons qu'une solution possible.

$$r = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}$$