Identifiant Wims:

Devoir 2ieme 10/12/2021.

Le sujet est à rendre avec la copie.
Noté sur 20,25.
C'est normalement un sujet de deux heures. Faites-en un maximum.

I Exercice. 7 points

Dans cet exercice les questions sont indépendantes les unes des autres et les réponses doivent être justifiées sauf indication contraire de l'énoncé. Aucune pénalité pour erreur

1. Parmi les réunions et intersections suivantes dites laquelle est vraie. Vous justifierez votre choix par un seul schéma.

1 *points*

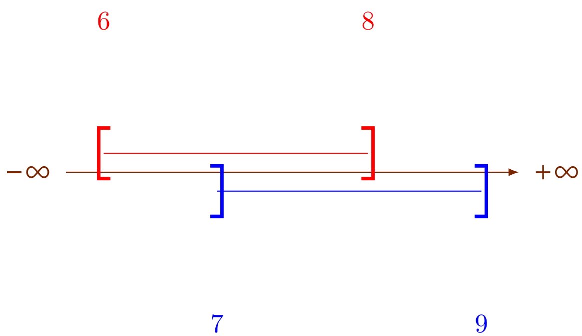
a) $]-\infty;3]\cup]7;9[=\varnothing$.

b) $[6;8]\cap]7;9]=]7;8]$.

c) $[14;20[\cap[15;17[=[14;20[$.

d) $]-\infty;1[\cap[1;+\infty[=\mathbb{R}$.

— 0,5 pour le schéma
— 0,5 pour la réponse.



Réponse b.

Identifiant Wims:

2. Sans aucune justification dites quelle fonction n'est ni paire ni impaire parmi celles proposées. Les fonctions sont toutes définies sur $\mathbb{R}$.

1 *points*

a) $f : x \mapsto 2x^2 - 4$.

b) $g : x \mapsto x^3$.

c) $h : x \mapsto \sqrt{x^2}$.

d) $\ell : x \mapsto x^3 + 1$.

— 1 pour la réponse.

Réponse obtenue grâce aux courbes représentatives sur la calculatrice.

Réponse d.

3. Résolvez l'équation $3x - \frac{1}{3} = -2x + \frac{2}{5}$ en détaillant soigneusement les étapes.

1 *points*

— 0,25 pour présentation avec passage à la ligne systématique.
— 0,25 pour indiquer clairement la méthode d'opérer des deux côtés.
— 0,25 pour la démarche de résolution sans aucune erreur (même mal justifiée).
— 0,25 pour la bonne solution
— 0,25 de bonus pour l'indication d'un raisonnement par équivalences.

$$3x - \frac{1}{3} = -2x + \frac{2}{5}$$

équivaut successivement à :

$$
\begin{aligned}
3x - \frac{1}{3} + 2x &= -2x + \frac{2}{5} + 2x \\
5x - \frac{1}{3} &= \frac{2}{5} \\
5x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} &= \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \\
5x &= \frac{11}{15} \\
\frac{5x}{5} &= \frac{\frac{11}{15}}{5} \\
x &= \frac{\frac{11}{6}}{\frac{5}{1}} \\
x &= \frac{11}{15} \times \frac{1}{5} \\
x &= \frac{11}{75}
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{11}{75}\right\}$.

4. Un restaurant sert 300 couverts par service, en proposant un menu à 16 euros et un menu à 24 euros. Pour l'inauguration de son restaurant, le gérant offre à chacun de ses clients soit un café, soit un apéritif.

   - 60 % des clients ont choisi un café, les autres un apéritif.
   - La moitié des clients ont choisi un menu à 24 euros avec un café.
   - Parmi ceux qui choisissent le menu à 24 euros, 75 % ont choisi un café.

   Complétez le tableau suivant en indiquant le nombre de clients.

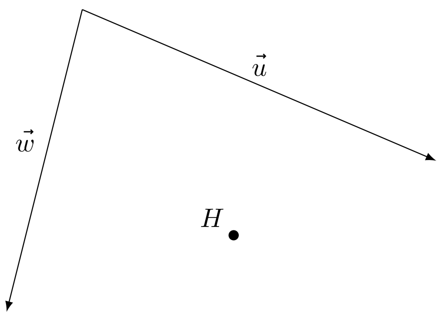
   2 points

	Menus à 16 €	Menus à 24 €	Total
Clients ayant choisi un café			
Clients ayant choisi un apéritif			
Total			

— −0,25 par erreur.
— 0,25 bonus pour démonstration d'un calcul de pourcentage.

	Menus à 16 €	Menus à 24 €	Total
Clients ayant choisi un café	30	150	180
Clients ayant choisi un apéritif	70	50	120
Total	100	200	300

5.

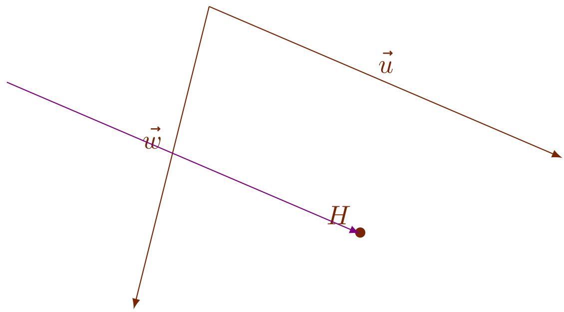


(a) Dessinez le représentant de $\vec{u}$ ayant pour extrémité H.

1 *points*

— 0,5 pour le tracer correct.
— 0,5 pour les traces de constructions correctes.

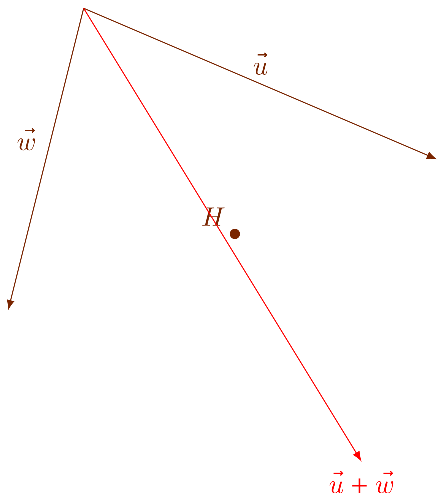
Identifiant Wims:



(b) Dessinez un représentant de $\vec{u} + \vec{w}$.

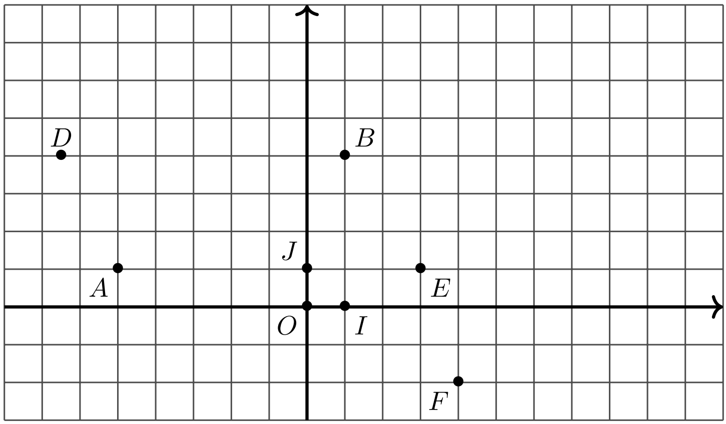
1 *points*

— 0,5 tracer correcte.
— Traces de constructions correctes.



II Exercice. 6,25 points

Dans un repère orthonormé (O,I,J) on considère les points $A(-5;1)$, $B(1;4)$, $D\left(-\frac{13}{2};4\right)$, E et F.



Partie A.

1. Lisez les coordonnées de F.

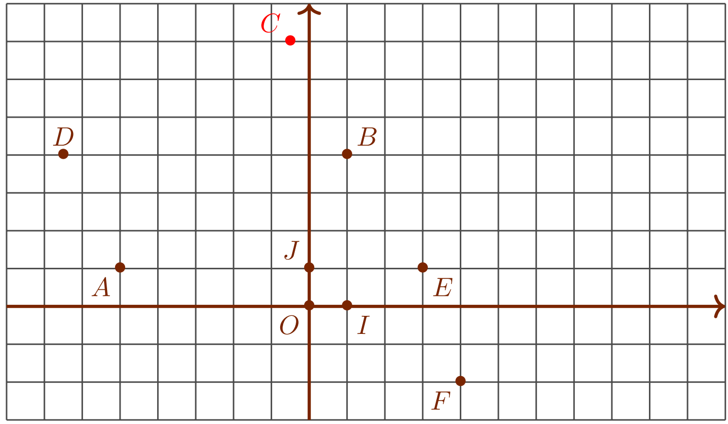
0,25 points

$F(4;-2)$.

2. Placez le point $C\left(-\frac{1}{2};7\right)$ dans le repère ci-dessus.

0,25 points

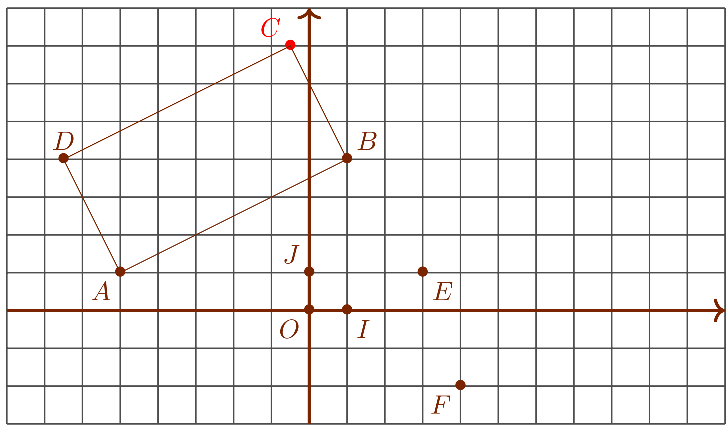
Identifiant Wims:



Partie B.

1. Conjecturez la nature du quadrilatère $ABCD$.

0,25 *points*



Il semble que $ABCD$ soit un parallélogramme.

2. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.

1,5 *points*

— 0,25 chercher coordonnées des milieux.
— 0,25 une formule littérale correcte.
— 0,25 une substitution par valeurs numérique sans erreur.
— 0,25 valeur abscisse.
— 0,25 valeur ordonnée.
— 0,25 évoquer les diagonales qui se coupent en leur milieu.

Démontrons que $ABCD$ est un parallélogramme.

* Notons M le milieu de $[AC]$.
  D'une part : $x_M = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{-5+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{11}{4}$
  et d'autre part : $y_M = \frac{y_A+y_c}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$
  donc : $M\left(-\frac{11}{4};4\right)$.
* De même, en notant N le milieu de $[BD]$, nous obtenons $N\left(-\frac{23}{4};\frac{5}{2}\right)$.
* Ainsi les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu. Autrement dit :

$$\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

3. (a) Calculez AB.

1 points

— 0,25 repère.
— 0,25 formule littérale
— 0,25 substitution par les valeurs numériques.
— 0,25 longueur.

Calculons AB.

(O,I,J) étant orthonormal :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(-5-1)^2 + (1-4)^2} \end{aligned}$$

$$AB = 3\sqrt{5}.$$

(b) On admet que $AD = \dfrac{3}{2}\sqrt{5}$ et $DB = \dfrac{15}{2}$.
Démontrez que ABD est rectangle en A.

0,75 *points*

— 0,5 vérification de l'égalité.
— Utilisation à bon escient du théorème de Pythagore pour conclure.

Démontrons que ABD est rectangle en A.

D'une part : $AB^2 + AD^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)^2 = \frac{225}{4}$
d'autre part : $\left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{225}{4}$
donc : $AB^2 + AD^2 = BD^2$.
Nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, que

ABD est rectangle en A.

(c) Que peut-on en déduire pour $ABCD$?

0,25 *points*

Le parallélogramme $ABCD$ est un parallélogramme dont un angle est droit donc

$ABCD$ est un rectangle.

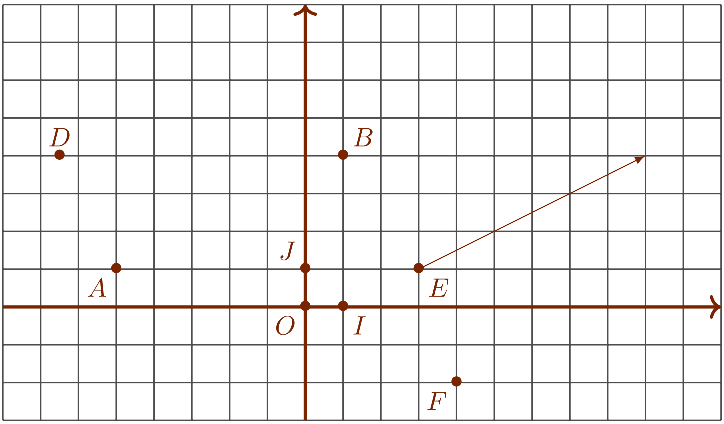
Partie C.

1. Dessinez le représentant de $\overrightarrow{AB}$ d'origine E.

0,5 *points*

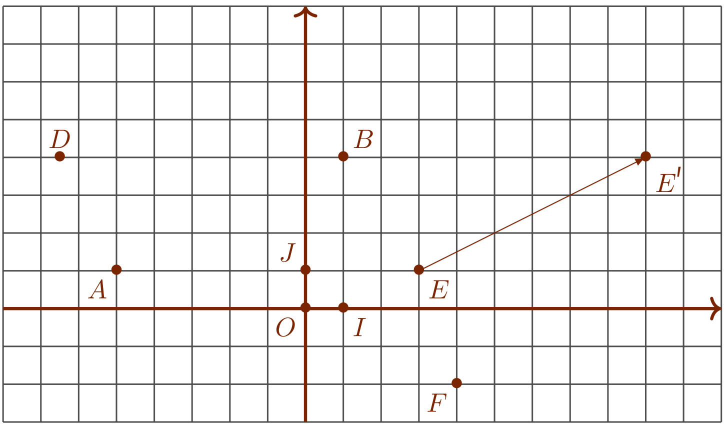
Identifiant Wims:

— Pas de justification graphique attendue du fait de l'utilisation des carreaux.



2. Placez, sur la figure, le point E' image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

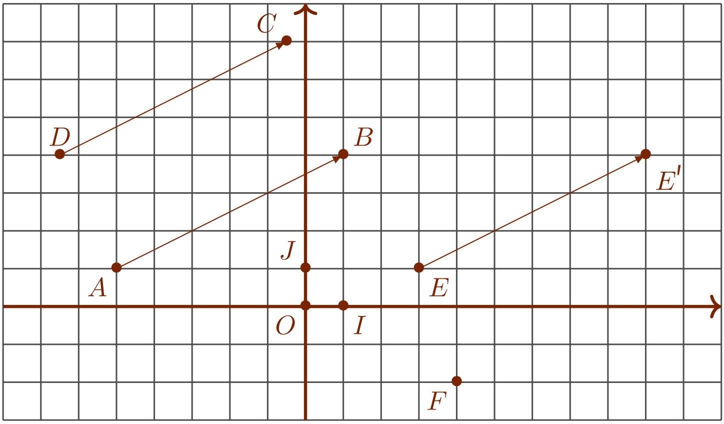
0,25 *points*



3. Démontrez que $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{DC}$.

0,75 *points*

— 0,25 pour la justification avec translation.
— 0,25 pour la justification avec parallélogramme.
— 0,25 pour la transitivité.



Démontrons que $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{DC}$.

* E' est l'image de E par le translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{AB}$.
* D'après la question B.2, $ABCD$ set un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

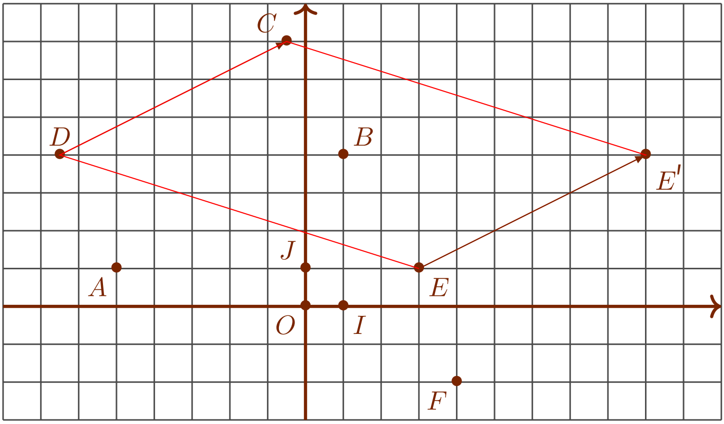
Des deux points précédents nous déduisons par transitivité :

$$\boxed{\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EE'}.}$$

4. Déduisez-en la nature de $EE'CD$.

0,5 *points*

— 0,25 pour un référence même vague à l'égalité précédente.
— 0,25 pour la nature correcte.

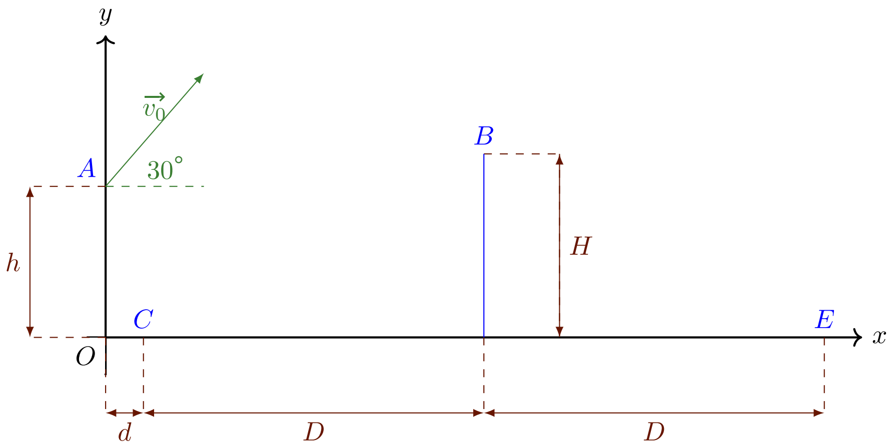


D'après la question précédente : $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{DC}$, autrement dit

$EE'CD$ est un parallélogramme.

III Exercice. 7 points

Un joueur de volley-ball s'entraîne au service.
On a représenté la situation dans le repère d'origine O ci-dessous.



Le terrain a une longueur $CE = 2 \times D = 18$ m. La hauteur H du filet est égale à 2,43 m. Le joueur, représenté par le segment $[OA]$, est situé à une distance $d = 1$ m de la ligne de fond (représentée par le point C). Le ballon part du point A situé sur l'axe des ordonnées.

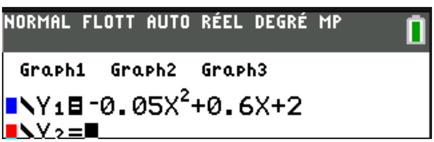
On a modélisé la trajectoire du ballon après avoir mesuré la vitesse initiale du ballon et l'angle initial de sa trajectoire. La fonction f qui donne la hauteur $y = f(x)$ du ballon en fonction de son abscisse x est définie par :

$$f(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}6x + 2.$$

1. Sans justification et en vous aidant de la calculatrice, résolvez graphiquement les équations suivantes.

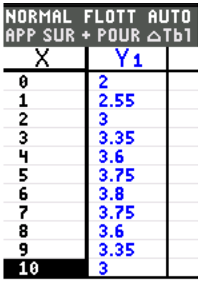
   Réglons la calculatrice pour obtenir l courbe représentative de la fonction f.

   * Nous entrons l'expression algébrique de la fonction :

   * Il faut régler la question du réglage de l'affichage de la fenêtre. Pour les abscisses, en lisant l'énoncé nous voyons que le terrain fait un peu moins de 20 mètres, donc $0 \leqslant x \leqslant 20$.

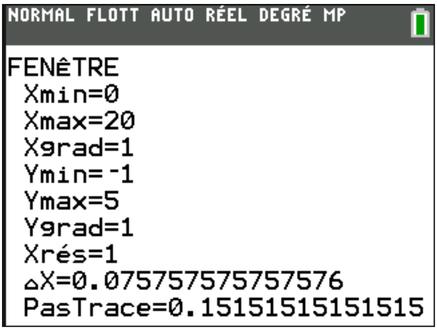
* Pour les ordonnées, le ballon ne pouvant aller sous terre les valeurs négatives ne sont pas pertinentes.
  Pour la valeur maximale des ordonnées, le tableau de valeur



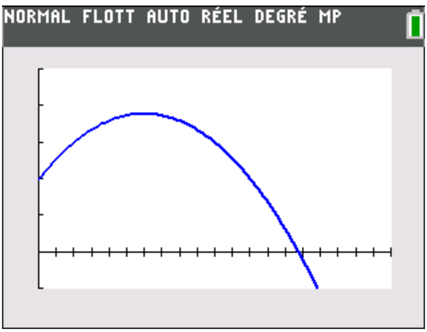
NORMAL FLOTT AUTO
APP SUR + POUR △Tbl

X	Y_1
0	2
1	2.55
2	3
3	3.35
4	3.6
5	3.75
6	3.8
7	3.75
8	3.6
9	3.35
10	3

  que ce sera aux alentours de 4 mètres : $0 \leqslant y \leqslant 4$.
* En tenant compte des points précédentes voici un paramétrage fenêtre raisonnable :



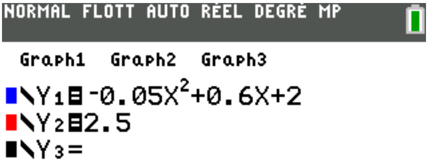
* Et voici la courbe correspondante.



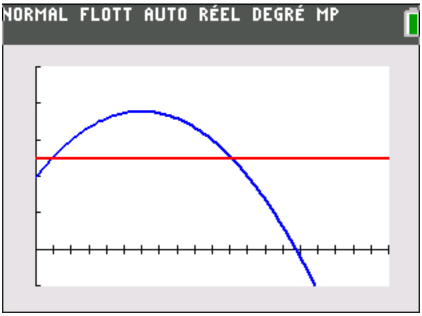
(a) $f(x) = 2{,}5$.

0,5 *points*

Nous recherchons donc les antécédents de 2,5 par la fonction f. Autrement dit nous recherchons les abscisses des points d'ordonnée 2,5 de la courbe représentative de f.
Pour faciliter la lecture ajoutons le tracé de la fonction constante égale à 2,5 :



et nous obtenons alors la courbe :



L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 2{,}5$ est $\{1; 11\}$.

Il était bien entendu possible d'utiliser le tableau de valeur, le déplacement du curseur sur le graphique (fonction trace), voire d'utiliser la fonction intersection.

(b) $f(x) = 6$.

0,5 *points*

La courbe représentative n'atteint pas une ordonnée de 6, comme nous l'avons remarqué lors du paramétrage de la fenêtre.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 6$ est $\varnothing$.

2. Quel ensemble de définition est-il judicieux de choisir pour la fonction f ?

0,25 *points*

Le contexte de l'exercice (lancer de la balle vers la droite) et le choix de l'origine à la verticale du point de départ nous incitent à choisir :

$$\mathscr{D}_f = [0; +\infty[.$$

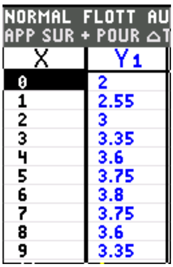
3. Complétez sans aucune justification le tableau de valeurs suivant.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$										

1 *points*

— $-0{,}25$ par erreur.
— $-0{,}25$ si valeur approchées.

Là encore le tableau de valeur de la calculatrice est fort utile :



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	2	2,55	3	3,35	3,6	3,75	3,8	3,75	3,6	3,35

4. Pour compléter le tableau de valeur précédent on propose le programme suivant, composé de la définition de la fonction f et du programme proprement dit.

```
def f(x):
    y= .....
    return(y)
```

Identifiant Wims:

```
for x in range(.....,.....):
    print(f(x))
```

Sans justification complétez-les pour obtenir les valeurs du tableau de valeurs.

0,75 points

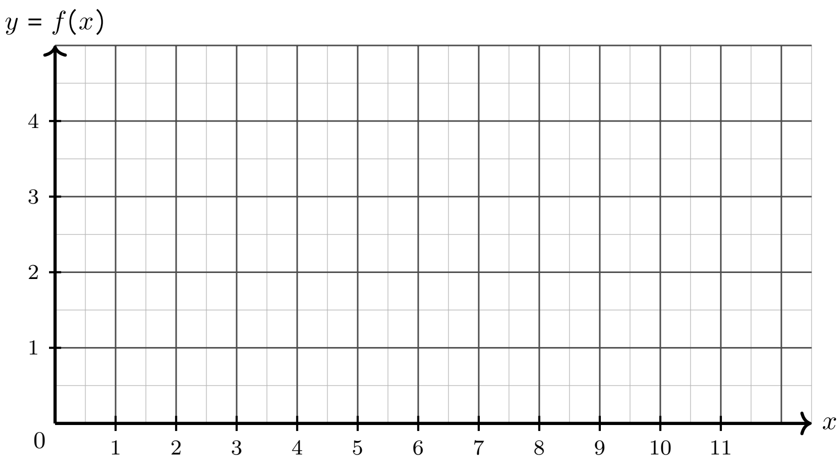
- 0,25 formule fonction.
- 0,25 premier argument du range.
- 0,25 second argument du range.

```
def f(x):
    y=-0.05x**2+0.6*x+2
    return(y)
```

```
for x in range(0,9+1):
    print(f(x))
```

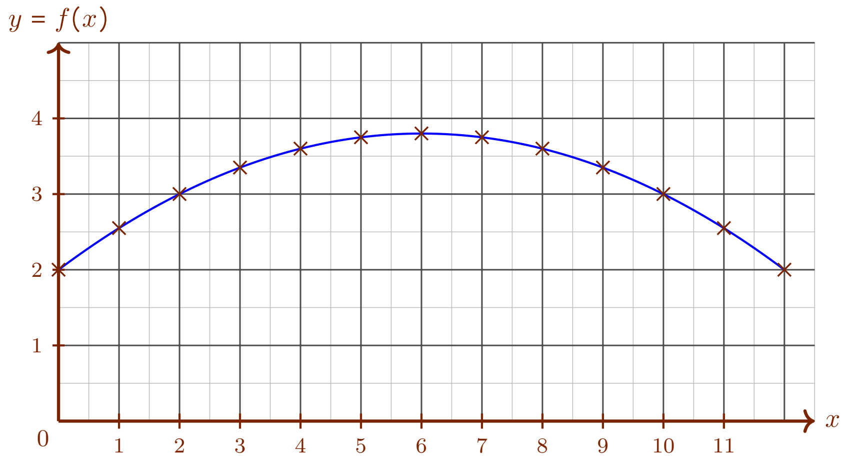
5. En vous aidant de la question précédente, tracez la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0;12]$ dans le repère ci-dessous.

1 points



— $-0{,}25$ si pas de points placés.
— $-0{,}25$ si tracé trop moche.
— $-0{,}25$ si non respect de l'intervalle imposé.

Le tableau de valeurs permet de placer quelques points, puis, en s'inspirant du tracé de la courbe proposé par la calculatrice nous relions les points.



6. Calculez la hauteur $h = OA$ du ballon au départ de sa trajectoire.

0,5 *points*

— 0,25 pour faire le lien avec $f(0)$.
— 0,25 pour la réponse.

Calculons $f(0)$.

$$\begin{aligned} f(0) &= -0{,}05 \times 0^2 + 0{,}6 \times 0 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{OA = 2 \text{ m.}}$$

7. Prouver que le ballon passe au dessus du filet.

0,5 *points*

— 0,25 lien avec $f(10)$.
— 0,25 réponse.

Le filet est situé à 1 m + 9 m = 10 m du lanceur et le filet à une hauteur de 2,43 m.

Démontrons que $f(10) > 2{,}43$.

$$\begin{aligned} f(10) &= -0{,}05 \times 10^2 + 0{,}6 \times 10 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Nous avons bien $f(10) > 2{,}43$ donc

le ballon passe au-dessus du filet.

8. On veut retrouver pour quelles distances parcourues le ballon est à une hauteur de 3 m.

   (a) Démontrez que résoudre l'équation $f(x) = 3$ équivaut à résoudre l'équation $-0{,}05x^2 + 0{,}6x - 1 = 0$.

   0,25 *points*

$$f(x) = 3$$

équivaut successivement à :

$$-0{,}05x^2 + 0{,}6x + 2 = 3$$

$$-0{,}05x^2 + 0{,}6x + 2 - 3 = 3 - 3$$

$$-0{,}05x^2 + 0{,}6x - 1 = 0$$

Les équations $f(x) = 3$ et $-0{,}05x^2 + 0{,}6x - 1 = 0$ sont équivalentes.

(b) Démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$-0{,}05x^2 + 0{,}6x - 1 = -0{,}05(x-2)(x-10)$.

0,75 *points*

- 0,25 partir du coté factorisé.
- 0,25 double distributivité.
- 0,25 distributivité.

Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-0{,}05x^2 + 0{,}6x - 1 = -0{,}05(x-2)(x-10)$.

Il s'agit de démontrer l'égalité de deux expressions algébriques. Le plus simple est de développer l'une pour obtenir l'autre.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
-0{,}05(x-2)(x-10) &= -0{,}05\left(x \times x + x \times (-10) + (-2) \times x + (-2) \times (-10)\right) \\
&= -0{,}05\left(x^2 - 10x - 2x + 20\right) \\
&= -0{,}05\left(x^2 - 12x + 20\right) \\
&= -0{,}05 \times x^2 + (-0{,}05) \times (-12)x + (-0{,}05) \times 20 \\
&= -0{,}05x^2 + 0{,}6x - 1
\end{aligned}$$

Nous avons démontré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ -0{,}05(x-2)(x-10) = -0{,}05x^2 + 0{,}6x - 1.}$$

(c) Résolvez l'équation $-0{,}05x^2 + 0{,}6x - 1 = 0$. Concluez.

1 *points*

- 0,25 partir de l'équation factorisée.
- 0,25 résoudre équation produit.
- 0,25 réponses.
- 0,25 conclusion de la question 8.

Résolvons l'équation proposée.

$$-0{,}05x^2 + 0{,}6x - 1 = 0$$

équivaut succesivement à :

$$
\begin{aligned}
-0{,}05(x-2)(x-10) &= 0 \\
x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 10 &= 0 \\
x = 2 \quad \text{ou} \quad x &= 10 \\
x = 2 \quad \text{ou} \quad x &= 10
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solution d l'équation est $\{2; 10\}$.

Nous pouvons conclure pur la question 8 :

La balle atteindra une hauteur de 3 m lorsqu'elle aura parcourue une distance au sol de 2 m puis de 10 m.

Identifiant Wims: