NOM :......................

Devoir sur table 06/11/2021.

Le sujet est à rendre avec les copies.
2 heures.
Calculatrice autorisée.

Exercice 1. 2 points

Cet exercice est un QCM une seule réponse est exacte. Indiquer sur la copie la lettre de la bonne réponse. Une mauvaise réponse n'est pas pénalisée.

Dans la suite x est un réel non nul.

1. Si $E(x) = \dfrac{x+1}{x} + \dfrac{3}{2}$ alors :

   a) $E(x) = \dfrac{x+4}{x+2}$.

   b) $E(x) = \dfrac{2x+2}{3x}$.

   c) $E(x) = \dfrac{3x+3}{2x}$.

   d) $E(x) = \dfrac{5x+2}{2x}$.

   Réponse d.

2. $\dfrac{x^{-2}x^{13}x^{4}}{\left(x^4\right)^2} =$

   a) x^{21}.

   b) x^{23}.

   c) x^{7}.

   d) x^{9}.

   Réponse c.

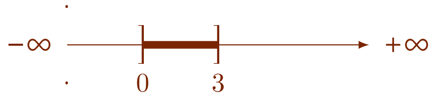
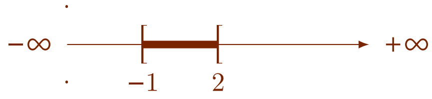
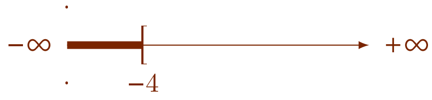
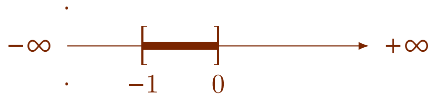
Exercice 2. 4,5 points

Partie A.

Compléter le tableau suivant sur cette feuille.

Inégalités	Intervalles	Représentations graphiques
$0 < x \leqslant 3$		
	$x \in [-1; 2[$	
	$x \in]-\infty; -4[$	
$-3 \leqslant x$		
	$x \in [-1; 0]$	
		

3 points

Inégalités	Intervalles	Représentations graphiques
$0 < x \leqslant 3$	$]0;3]$	
$-1 \leqslant x < 2$	$x \in [-1;2[$	
$]-\infty;-4[$	$x \in]-\infty;-4[$	
$-3 \leqslant x$	$[-3;+\infty[$	
$-1 \leqslant x \leqslant 0$	$x \in [-1;0]$	
$2 \leqslant x$	$[2;+\infty[$	

Partie B.

Simplifiez si possible l'expression des ensembles suivants (en justifiant bien sûr).

1. $I_1 =]-\infty;4[\cap [-2;17]$.

0,5 points

$$I_1 = [-2;4[.$$

2. $I_2 = [3;7[\cup [2;20[$.

0,5 points

$$I_2 = [2;20[.$$

3. $I_3 =]-3;4[\cup]2;3]$.

0,5 *points*

$I_3 =]-3;4[$.

Exercice 3. 2 points

1. Complétez sur cette feuille le tableau d'état des variables correspondant au programme Python rédigé à gauche.
Il faut indiquer dans les cases du tableau le nombre mémorisé dans les variables A et B après l'instruction écrite dans la première colonne.

```
A=4
B=A-2
B=B**2
B=B-A
print(B)
```

Instructions	Contenu de A	Contenu de B
$A = 4$		
$B = A - 2$		
$B = B**2$		
$B = B - A$		

1 *points*

Instructions	Contenu de A	Contenu de B
$A = 4$	4	
$B = A - 2$	4	$4 - 2 = 2$
$B = B**2$	4	$2^2 = 4$
$B = B - A$	4	$4 - 4 = 0$

2. Qu'affiche le programme de calcul suivant rédigé en Python ?

```
A=4
if A+7<11:
    B=A
else:
    B=2*A
print(B)
```

0,5 *points*

Le programme affiche 8.

3. Le Shiba Inu est une monnaie virtuelle loufoque dont la valeur double chaque semaine. Raoul achète pour 200 euros de Shiba Inu.
   Complétez le programme suivant pour qu'il affiche la valeur des Shiba Inu achetés par Raoul sur 12 semaines.

```
shiba=200
for i in range(1,13):
    shiba=......
    print(shiba)
```

0,5 *points*

```
shiba=200
for i in range(1,13):
    shiba=shiba*2
    print(shiba)
```

Exercice 4. 4,5 points

Dans un lycée il y a 600 élèves en classe de seconde.

- 80 % de ces élèves sont demi-pensionnaires,
- 40 % des demi-pensionnaires sont des filles,
- 20 % des externes sont des garçons.

1. Calculez le nombre d'élèves de seconde demi-pensionnaires.

1 *points*

— 0,25 notation ensemble ou schéma.
— 0,25 formule littérale.
— 0,25 substitution par des valeurs numériques.
— 0,25 réponse numérique et interprétation.

Notons E l'ensemble des élèves de seconde et F l'ensemble des élèves de seconde qui sont demi-pensionnaires.

Calculons $\#F$.

$$\begin{aligned}\#F &= \frac{p_E(F)}{100} \times \#E \\ &= \frac{80}{100} \times 600 \\ &= 480\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{480 élèves de seconde sont demi-pensionnaires.}}$$

2. Complétez sans justification le tableau suivant qui concerne les élèves de seconde.

	Demi-pensionnaires	Externes	Total.
Garçons			
Filles			
Total			600

1,5 *points*

— $-0{,}25$ par erreur ou case non remplie.

	Demi-pensionnaires	Externes	Total.
Garçons	288	24	312
Filles	192	96	288
Total	480	120	600

3. Quelle est la proportion d'élèves externes en seconde ?

1 *points*

— 0,25 notation ensemble ou schéma.
— 0,25 formule littérale.
— 0,25 substitution par des valeurs numériques.
— 0,25 réponse numérique et interprétation.

Notons F' l'ensemble des élèves de secondes qui sont externes.

Déterminons la proportion d'élèves de seconde qui sont externes.

En pourcentage :

$$\begin{aligned} p_E(F') &= \frac{\#F'}{\#E} \times 100 \\ &= \frac{120}{600} \times 100 \\ &= 20 \end{aligned}$$

20 % des élèves de seconde sont externes.

4. 20 % des élèves du lycée sont en filière STMG et 40 % d'entre eux sont demi-pensionnaires. Calculer le pourcentage d'élèves demi-pensionnaire en STMG par rapport à l'ensemble des élèves du lycée.

1 *points*

— 0,25 notation ensemble ou schéma ou ensembles emboîtés.
— 0,25 formule littérale.
— 0,25 substitution par des valeurs numériques.
— 0,25 réponse numérique et interprétation.

Notons M l'ensemble des élèves du lycée, N l'ensemble des élèves de STMG, D l'ensemble des élèves de STMG qui sont demi-pensionnaires.

Calculons $p_M(D)$.

Puisque $D \subset N \subset M$:

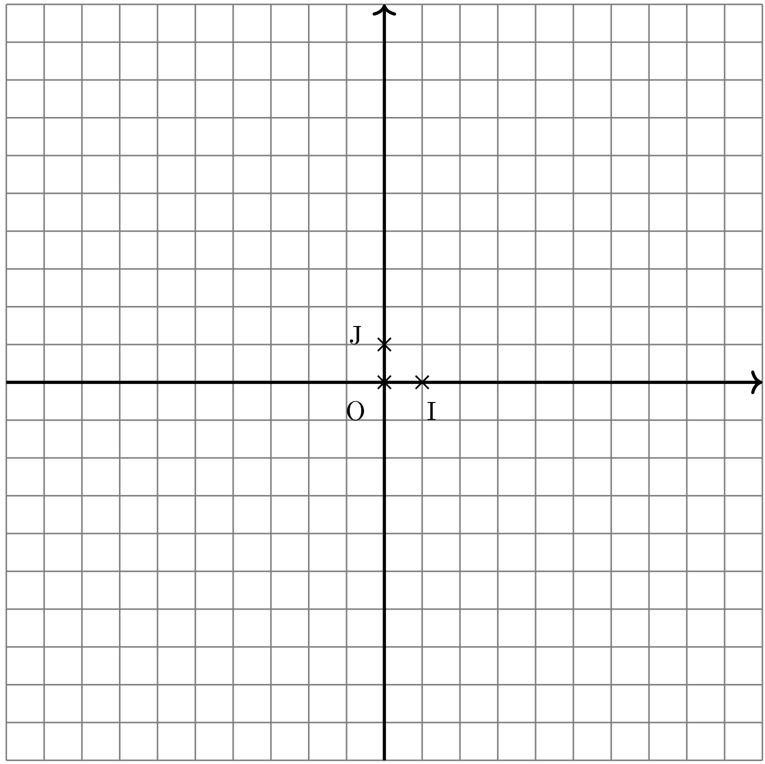
$$\begin{aligned} p_M(D) &= \frac{p_M(N) \times p_N(D)}{100} \\ &= \frac{20 \times 40}{100} \\ &= 8 \end{aligned}$$

8 % des élèves du lycée sont en STMG et sont demi-pensionnaires.

Exercice 5. 4,25 points

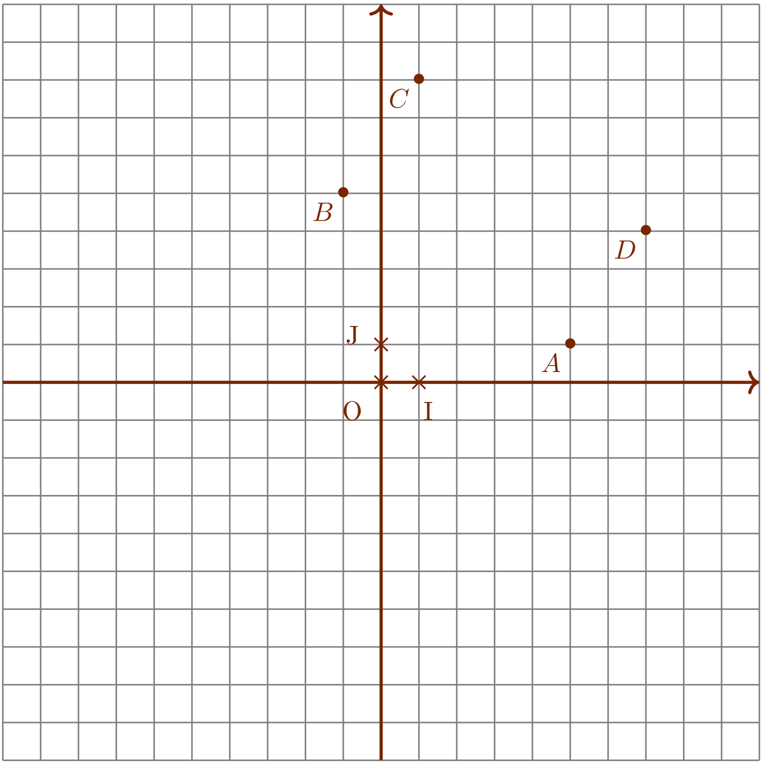
On considère les points $A(5;1)$, $B(-1;5)$, $C(1;8)$ et $D(7;4)$ dans un repère orthonormé (O,I,J).

1. Placez les points dans le repère ci-dessous.



0,5 *points*

— $-0{,}25$ par erreur.



2. Calculez AB.

1 *points*

Calculons AB.

Le repère est orthonormé donc :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ &= \sqrt{[5 - (-1)]^2 + (1 - 5)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{AB = 2\sqrt{13}.}$$

3. Montrez que ABC est rectangle.

1 *points*

- 0,25 AC.
- 0,25 BC.
- 0,25 démonstration $AC^2 + CB^2 = AB^2$.
- 0,25 invoquer Pythagore avec pertinence.

D'après la figure ABC semble rectangle en B. Donc :

Démontrons que ABC est rectangle en B.

En procédant comme à la question précédente :

$$AC = \sqrt{65}$$
$$BC = \sqrt{13}$$

D'une part :

$$AC^2 = \sqrt{65}^2 = 65,$$

et d'autre part

$$AB^2 + BC^2 = (2\sqrt{13})^2 + \sqrt{13}^2 = 65$$

donc

$$AC^2 + CB^2 = AB^2.$$

Nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore :

$$\boxed{ABC \text{ est rectangle en } B.}$$

4. Déterminez les coordonnées du milieu M de $[AC]$.

1 *points*

- 0,25 formule littérale.
- 0,25 substitution par valeur numérique.
- 0,25 valeur abscisse.
- 0,25 valeur ordonnée.

Déterminons M.

Puisque M est le milieu de $[AC]$:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_C}{2} \\ &= \frac{5+1}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} \\ &= \frac{1+8}{2} \\ &= 4{,}5 \end{aligned}$$

$$\boxed{M(3;4{,}5).}$$

5. En vous aidant des questions précédentes, déterminez la nature du quadrilatère $ABCD$.

0,75 *points*

— 0,25 milieu de l'autre diagonale.
— 0,25 justification $ABCD$ est un parallélogramme.
— 0,25 parallélogramme avec un angle droit.

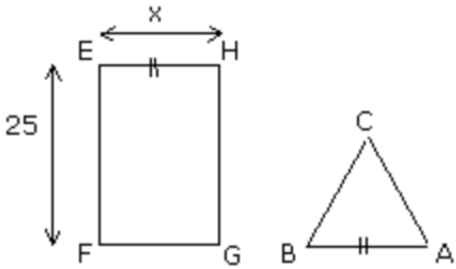
* En procédant comme à la question précédente on démontre que le milieu N de $[BD]$ vérifie $N(3;4{,}5)$. Autrement dit les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu. $ABCD$ est donc un parallélogramme.
* De plus, d'après la question 3., le parallélogramme $ABCD$ a un angle droit, et par conséquent :

$$\boxed{ABCD \text{ est un rectangle.}}$$

Exercice 6. 3 points

Soit $EFGH$ un rectangle tel que $EF = 25$ et $EH = x$ et ABC un triangle équilatéral de côté de longueur x.

1. Déterminer x pour que le périmètre du triangle équilatéral ABC soit le tiers du périmètre du rectangle $EFGH$?



1,75 *points*

— 0,25 par expression littérale de périmètre.
— 0,25 mise en équation.
— 1 résolution justifiée de l'équation.
— 0,25 bonus raisonnement analyse-synthèse ou vérification nombre positif.

Déterminons x.

Le périmètre du rectangle est $2 \times 25 + 2x$ et celui du triangle $3x$.

* Analyse.
On souhaite que x soit solution de

$$3x = \frac{1}{3}(50 + 2x)$$

Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
3\times 3x &= 3\times\frac{1}{3}(50+2x)\\
9x &= 50+2x\\
9x-2x &= 50+2x-2x\\
7x &= 50\\
\frac{7x}{7} &= \frac{50}{7}\\
x &= \frac{50}{7}
\end{aligned}$$

* Synthèse.
  On vérifie aisément que $\frac{50}{7}$ est une valeur pour laquelle l'égalité est vérifiée et qui convient puisque c'est un nombre positif qui peut donc représenter une longueur.

Le problème n'a qu'une solution à savoir $\frac{50}{7}$.

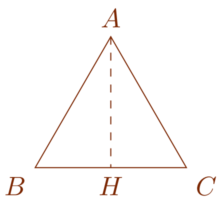
2. *Cette question peut paraître difficile. Cependant toute trace de recherche sera prise en compte.*
   Déterminer x pour que l'aire du rectangle $EFGH$ soit égale à l'aire du triangle ABC.

1,25 *points*

Déterminons s'il est possible que les deux aires soient égales.

Si l'aire du rectangle est bien sûr $25x$, l'aire du triangle est moins évidente.

* Déterminons la hauteur du triangle équilatéral de côté x.
  Notons ABC le triangle équilatéral de longueur de côté x. H le pied de la hauteur issue de A.



ABH est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$AH^2 + HB^2 = AB^2$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} AH^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 &= x^2 \\ AH^2 + \frac{1}{4}x^2 &= x^2 \\ AH^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 &= x^2 - \frac{1}{4}x^2 \\ AH^2 &= \frac{3}{4}x^2 \end{aligned}$$

Puisque x est positif :

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

* Déterminons l'aire $\mathscr{A}(x)$ du triangle ABC.

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(x) &= \frac{1}{2} \times AB \times AH \\ &= \frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \end{aligned}$$

Maintenant l'aire du triangle trouvée, le problème se ramène à la résolution de l'équation

$$25x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

Ce n'est pas une équation du premier degré. Il faut donc se ramener à une équation produit nul.

La précédente équation équivaut successivement à :

$$25x - 25x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - 25x$$
$$0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x - 25\right)x$$
$$0 = \frac{\sqrt{3}}{4}x - 25 \quad \text{ou} \quad 0 = x$$
$$0 + 25 = \frac{\sqrt{3}}{4}x - 25 + 25 \quad \text{ou} \quad 0 = x$$
$$25 = \frac{\sqrt{3}}{4}x \quad \text{ou} \quad 0 = x$$
$$\frac{4}{\sqrt{3}} \times 25 = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{4}x \quad \text{ou} \quad 0 = x$$
$$\frac{100}{3}\sqrt{3} = x \quad \text{ou} \quad x = 0$$

Les aires seront égales si et seulement si $x \in \left\{0; \frac{100}{3}\sqrt{3}\right\}$.