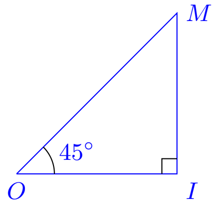
Fonctions sinus et cosinus.

I Petits problèmes de géométrie à la façon du collège.

Exercice 1

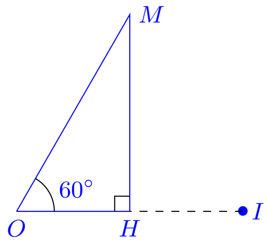
Soient OIM un triangle rectangle en I tel que $OM = 1$ et $\widehat{IOM} = 45°$.



1. Déterminez la longueur OI avec une expression radicale.
2. Exprimez la longueur OI en fonction de $\cos(45°)$.
3. Déduisez-en la valeur exacte de $\cos(45°)$.

Exercice 2

Soient OHM un triangle rectangle en H tel que $OM = 1$ et $\widehat{HOM} = 60°$, I le symétrique de O par rapport à H.

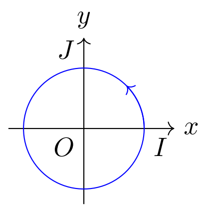


1. Justifiez que $OI = 1$.
2. Déduisez-en la longueur OH.
3. Exprimez OH en fonction de $\cos(60°)$.
4. Déduisez en une valeur exacte de $\cos(60°)$.
5. En remarquant que $MH = \cos(30°)$ trouvez une expression radicale de $\cos(30°)$.

II Radian. (Hors programme)

Définition 1

Étant donné un repère orthonormé (O,I,J), le *cercle trigonométrique* est le cercle de centre O, de rayon 1 muni du sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre).

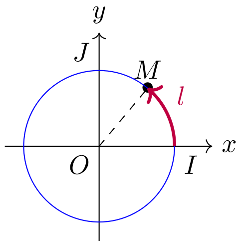


Remarques.

1. La longueur du cercle trigonométrique est 2π, car son rayon est 1.
2. Le sens trigonométrique est aussi appelé *sens direct*. C'est un sens conventionnel qui apparaît autant en physique qu'en mathématiques.
   Le sens direct est celui habituellement choisi pour construire les repères (O,I,J).

Définition 2

Soit M un point sur le cercle trigonométrique.
Une mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$ est la longueur algébrique, l, de l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$.



Remarques.

1. Mesure algébrique signifie que la longueur peut être comptée négativement si l'on se déplace dans le sens indirecte sur le cercle.
2. Le radian est noté rad.
3. L'article indéfini *Une* signifie qu'il existe plusieurs mesures en radian d'un même angle. La longueur 2π correspond à un tour complet sur le cercle trigonométrique ainsi les mesures en radian l et $l + 2\pi$ correspondent à un même point M du cercle trigonométrique. Plus généralement

$$l \equiv l + 2\pi \equiv l + 4\pi \equiv \dots$$

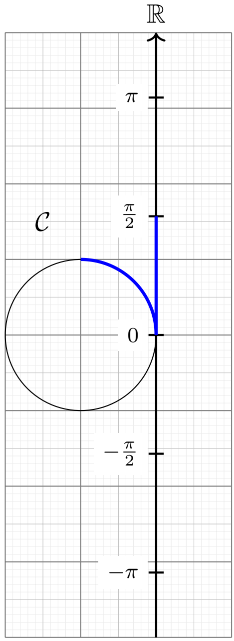
et

$$l \equiv l - 2\pi \equiv l - 4\pi \equiv \dots$$

Deux mesures l et l' d'un angle sont liées par la relation

$$l' = l + 2k\pi$$

où k est un entier relatif.
Une façon de se représenter ceci consiste à enrouler l'axe des réels sur le cercle trigonométrique (cliquez sur l'image pour voir l'animation) :



Proposition 1

Les mesures d'angles en degrés et en radians sont proportionnelles

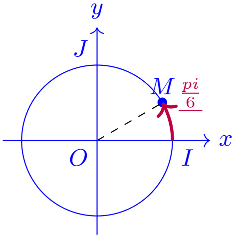
$$180° = \pi \text{ rad}$$

Exercice 3

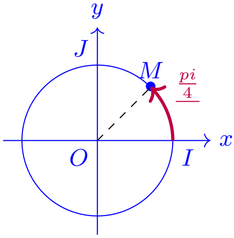
Rappelons que le périmètre du cercle trigonométrique est 2π et qu'un angle plein mesure $360°$.

Donnez des mesures en radian des angles suivants : $360°$, $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $180°$ et $270°$.

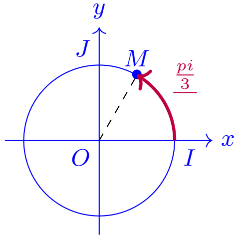
Complétez alors les schémas suivants :



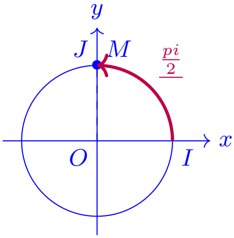
$\widehat{IOM} = 30°$



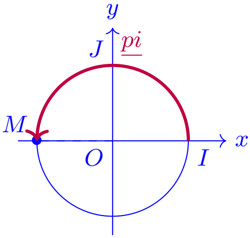
$\widehat{IOM} = 45°$



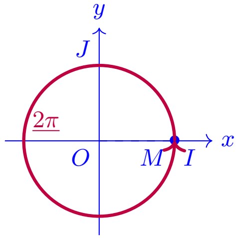
$\widehat{IOM} = 60°$



$\widehat{IOM} = 90°$

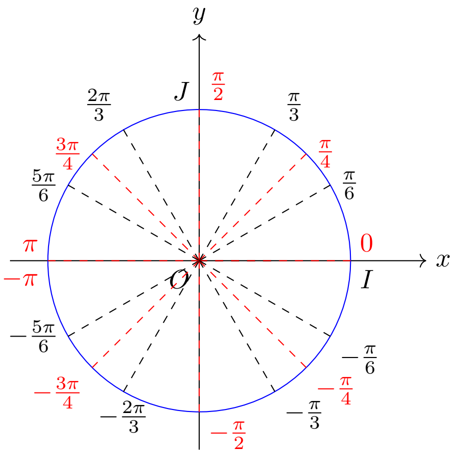


$\widehat{IOM} = 180°$



$\widehat{IOM} = 360°$

Les mesures en radians se comptent souvent en multiples ou sous-multiples de π. Les angles suivants doivent vous être familiers.



III Cosinus et sinus.

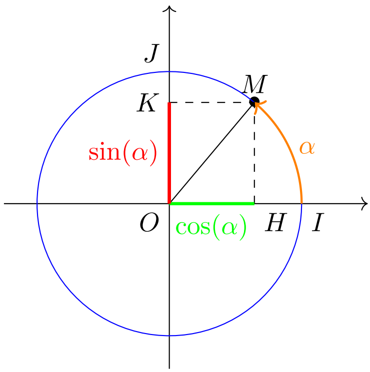
Les cosinus et sinus ont été définis au collège, mais uniquement pour des angles d'un triangle rectangle, donc d'une mesure entre 0 et 90°.

Nous souhaiterions définir cosinus et sinus comme des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ il faut par conséquent changer de définition. Et pour cela nous devons agrandir l'ensemble de définition. Que se passerait-il si nous agrandissions l'angle d'un triangle rectangle ?

Définition 3

Soit un angle α repéré par un point M sur le cercle trigonométrique. Nous définirons désormais :

- $\cos(\alpha)$ est l'abscisse de M,
- $\sin(\alpha)$ est l'ordonnée de M.



Remarques.

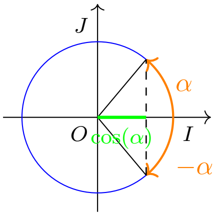
1. Cette définition permet d'étendre la notion de cosinus vue au collège. Le cosinus et les sinus peuvent alors prendre des valeurs négatives plus précisément pour tout angle α
$$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$
$$-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$$
2. Il existe un définition encore plus générale du cosinus et du sinus qui nécessite de connaître la fonction exponentielle que vous découvrirez en terminale.

Valeurs remarquables.

Mesure en degré α	0	30	45	60	90
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Mesure en radian α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Formules trigonométriques avec cosinus.

- $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$. Le cosinus est périodique de période 2π.



- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.
  La fonction cosinus est dite paire : sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

Formule liant cosinus et sinus.

Proposition 2

Si α est un réel
$$[\cos(\alpha)]^2 + [\sin(\alpha)]^2 = 1$$

IV Exercices.

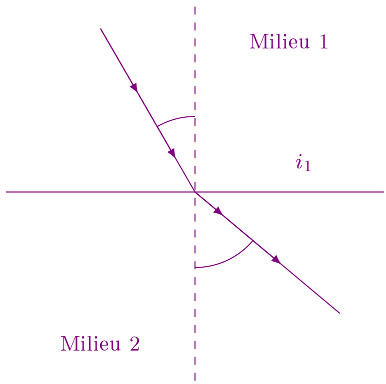
Exercice 4

Déterminez les solutions réelles des équations suivantes :

1. $\cos(x) = -\frac{\pi}{2}$.
2. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $\sin(x) = 2$.
4. $\cos(x) = 0{,}3$.

Exercice 5 pour s'entraîner.

La relation de Snell-Descartes précise la trajectoire d'un rayon lumineux lorsqu'il change de milieu. Chaque milieu j est caractérisé par son indice optique noté n_j. Cet indice est le rapport entre la vitesse de la lumière dans le vide (notée $c = 3 \cdot 10^8$ ms^{-1}), et la vitesse de la lumière dans le milieu j (notée v_j). On a ainsi
$$n_j = \frac{c}{v_j}.$$



1. Exprimez le rapport $\frac{\sin(i_2)}{\sin(i_1)}$ en fonction du rapport des vitesses $\frac{v_2}{v_1}$. En déduire la valeur de i_2 quand la lumière progresse deux fois plus vite dans le milieu 2 que dans le milieu 1, pour $i_1 = 30°$.
2. Grâce au tableau suivant, déterminez l'angle i_2 pour un rayon lumineux ayant un angle i_1 de 10° dans l'air puis passant dans l'eau.

Milieu	air	eau	verre	diamant
Indice optique	1	1,33	1,5	2,4

3. Même question avec comme second milieu le verre puis le diamant.
4. Déduisez-en le milieu, parmi ceux présentés ici, qui permet de dévier le plus un rayon lumineux.

Exercice 6 pour s'entraîner.

Exercice 7

À un instant t exprimé en seconde, la tension aux bornes d'un dipôle électrique vaut

$$U(t) = U_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t+\varphi)\right)$$

où les paramètres U_{max}, T et φ sont des nombres réels positifs. U_{max} s'appelle la tension maximale, T la période et φ le déphasage. T est strictement positif.

1. Expliquez la dénomination tension maximale.
2. Calculez $U(0)$, en déduire un déphasage rendant $U(0)$ maximale, c'est-à-dire telle que $U(0) = U_{max}$.
3. Montrez que pour tout t, on a : $U(t+T) = U(t)$.
4. L'inverse de T est appelé la fréquence. Pour le réseau électrique français, elle est de 50 Herz (noté Hz). Calculez la tension aux bornes du dipôle ($U_{max} = 310$ V) pour déphasage nul, pour un temps égale à une minute.

Exercice 8

Exercice 9