Échantillonnage.

I Intervalle de fluctuation.

Considérons l'expérience aléatoire consistant en un pile-ou-face avec une pièce équilibrée.

Si je joue une fois et que j'obtiens Pile puis-je en déduire que le résultat de cette expérience est toujours Pile ? Non. Pour analyser le résultat d'une expérience aléatoire il faut la recommencer n fois, le nombre n restant à fixer.

Les n résultats successivement obtenus en répétant l'expérience à l'identique et de façon indépendante, constituent un *échantillon de taille n*.

1. Si je fais un sondage (avec une question fermée, les réponses étant oui ou non) auprès de 237 personnes alors les réponses des personnes interrogées constitue un échantillon de taille 237.
2. Si lors de la répétition d'une expérience physique j'obtiens 1 000 mesures d'une grandeur, alors l'ensemble des mesures obtenues constitue un échantillon de taille 1 000.
3. Dans le cas général, pour déterminer la loi de probabilité associée à une expérience aléatoire, il faut recommencer un grand nombre de fois cette expérience et calculer la fréquence d'apparition de chaque issue. Si l'expérience aléatoire est recommencée 1 000 000 fois alors les résultats obtenus lors de toutes ces expériences constituent un échantillon de taille 1 000 000.

Si je dois recommencer les n expériences j'obtiendrai un échantillon différent. Ce phénomène est appelé la *fluctuation d'échantillonnage*.

Exercice 1.

L'algorithme ci-dessous modélise des lancers de pièces.

```
import random,math

def lancers():
  n=0
  pile=0
  while n<50:
    issue=random.random()
    if issue<0.5:
      pile=pile+1
    n=n+1
  print(pile)
```

Télécharger le code.

Le module *random* est un ensemble de fonctions liées aux probabilités et à l'aléatoire. En particulier la fonction *random* (qui est appelée par la commande *random.random()*) renvoie un nombre décimal de $[0;1[$.

1. Programmez ce script.
2. Indiquez
   (a) le nom de la fonction Python ainsi crée,
   (b) le nombre d'argument de cette fonction,
   (c) le nombre de variables intervenant dans cette fonction.
3. Expliquez comment interpréter les variables au vu de l'expérience modélisée. Vous préciserez les deux variables qui sont des compteurs en disant ce qu'ils comptent.
4. Quel est l'échantillon dans cet expérience ? Quel est sa taille ?
5. Nous nous intéressons dorénavant au fluctuations de cet échantillonnage. Relancez plusieurs fois le programme. Obtenez-vous 50 ou 0 ? Quelle valeur peut-on intuitivement espérer ?

Exercice 2.

Dans le programme de l'exercice précédent remplacez le `print(pile)` par

```
if 0.5-1/math.sqrt(50)<= pile/50 and pile/50<=0.5+1/
    math.sqrt(50):
  print("Dans l'intervalle")
else:
  print("Hors de l'intervalle")
```

Télécharger le code.

1. Relancez le programme dix fois et notez les résultats obtenus.
2. Comment interpréter ce résultat ?
3. Créez une nouvelle fonction dans le même script
   — qui recommence ce même échantillonnage jusqu'à obtenir l'affichage `Hors de l'intervalle`
   — et qui indique le nombre d'échantillons qu'il a fallu essayer.

Proposition 1

Soit p la probabilité d'un événement d'une expérience aléatoire avec $0{,}2 \leq p \leq 0{,}8$.
Lorsque l'expérience est réalisée et répétée $n \geq 25$ fois (à l'identique et de façon indépendante), il y a 95 % de chances que la fréquence d'apparition de l'événement soit dans l'intervalle

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Remarques

1. La démonstration de ce résultat sera vu en terminale avec la loi de probabilité dite binomiale.
2. Autrement dit il y a 5 % de "chance" que la fréquence d'apparitions de l'événement ne soit pas dans cet intervalle.
3. Ce résultat permet de tester la cohérence entre la fréquence d'apparition d'un résultat (« obtenir Pile ») lorsqu'une expérience aléatoire est renouvelée n fois et la probabilité théorique ($p = \frac{1}{2}$).
   Si la fréquence d'apparition f n'est pas dans l'intervalle c'est qu'il y a une erreur : soit p est faux, soit l'échantillon a été mal choisi.

4. L'intervalle est appelé l'*intervalle de fluctuation des fréquences au seuil de 95%*.

Exercice 3.

Un slogan publicitaire affirme : « 55% des personnes ayant suivi la méthode ARETABA ont arrêté de fumer ! ». Dans un échantillon de 700 personnes ayant suivi cette méthode, prises au hasard avec remise, 382 ont arrêté de fumer.
À partir de cet échantillon, le slogan publicitaire est-il acceptable, au seuil de 5% ?

Exercice 4.

Exercice 18 page 35 (Sesamath).

Exercice 5.

Exercice 19 page 35 (Sesamath). Échantillon représentatif ?

Exercice 6.

Exercice 23 page 36 (Sesamath).

Exercice 7.

Exercice 25 page 36 (Sesamath). Vérifier une modélisation probabiliste.

II Loi des grands nombres.

Exercice 8.

Nous allons dans cet exercice simuler un lancer de dé à six faces.

1. Donnez sans justification une valeur approchée de $\frac{1}{6}$.
2. Relancez le script Python suivant puis expliquez le rôle de la fonction `randint(1,6)`.

```
import random
print(randint(1,6))
```

3. Expliquez le lien entre la fonction Python suivante et l'obtention du 1 lors d'un lancé de dé à 6 faces.

```
import random

def lancer(n):
  c=0
  for k in range(n):
    r=random.randint(1,6)
    if r==1:
      c=c+1
  return(c/n)
```

Lien pour copier/coller le script.

4. Utilisez la fonction précédente pour $n = 100$, $n = 1\,000$, $n = 10\,000$, $n = 1\,000\,000$. Que constatez vous ?

III Intervalle de confiance.

L'intervalle de fluctuation permet de mesurer la dispersion des valeurs de l'échantillon autour d'une valeur théorique (proportion ou probabilité).

Cependant lorsqu'un sondage avec une question fermée est effectué, nous ne savons pas à priori la proportion de personnes qui vont répondre favorablement. Et le résultat du sondage ne peut-être considéré comme exact (transposable directement à la population totale) à cause du phénomène de fluctuation.

Nous pourrons uniquement donner un encadrement de la valeur théorique.

Exercice 9.

Soient $p \in [0;1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrez :

$$f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \Leftrightarrow p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Le précédent exercice montre qu'il est possible d'inférer de l'échantillon un encadrement de la valeur théorique p. Par exemple, dans le domaine des sondages, nous n'aurons plus uniquement le résultat du sondage mais aussi un encadrement de l'erreur ; ce que les sondeurs appellent des marges d'erreurs.

Proposition 2

Soit f la la fréquence d'apparition d'un événement d'une expérience aléatoire avec $0{,}2 \leq f \leq 0{,}8$.
Lorsque l'expérience est réalisée et répétée $n \geq 25$ fois (à l'identique et de façon indépendante), il y a 95 % de chances que la probabilité de l'événement soit dans l'intervalle

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Exercice 10.

Une entreprise de sondage interroge 1 200 personnes avec la question suivante : « Allez-vous voter pour Dugenoux à la prochaine élection ? »
571 personnes ont répondu oui.
Dugenoux peut-t-il être élu ?

IV Exercices.

Exercice 11.

Une maladie attaque une plante dans 70 % des cas lorsque cette plante n'a pas été traitée. On traite un échantillon de 150 de ces plantes et on constate alors que 28 % de ces plantes sont malades. Peut-on en conclure que le produit est efficace au seuil de 95 % ?

Exercice 12.

Une entreprise fabrique des composants mécaniques en très grande quantité dans deux ateliers A et B. Le cahier des charges indique que l'entreprise tolère que 7 % des composants produits soient défectueux.
On accepte, dans cet exercice, que la proportion théorique p soit inférieure à 0,20.
Lors du contrôle hebdomadaire, on a testé 400 composants dans l'atelier A et 650 dans l'atelier B. Pour l'atelier A on a trouvé 33 composants défectueux et pour l'atelier B on en a trouvé 78.
Que peut-on en conclure concernant la production dans chacun des ateliers ?

Exercice 13.

1. Rédigez un algorithme qui calcule les bornes de l'intervalle de fluctuation des fréquences.
2. Complétez l'algorithme de sorte qu'il vérifie les conditions de la proposition 1 avant de déterminer l'intervalle de fluctuation.
3. Complétez l'algorithme de sorte qu'il indique si la fréquence appartient ou non à l'intervalle de fluctuation des fréquences.

Exercice 14.

On considère un caractère dont la proportion dans une population donnée est p avec $0{,}2 \leq p \leq 0{,}8$.
On prélève un échantillon de taille n de cette population et on note f la fréquence du caractère dans cet échantillon.
On note I l'intervalle $\left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}};p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

1. Exprimer l'amplitude de l'intervalle I (distance entre ses deux bornes) en fonction de la taille n de l'échantillon.
2. Déterminer la plus petite valeur de n pour que l'amplitude de l'intervalle I soit
   (a) inférieure ou égale à 0,1 (10 %),
   (b) inférieure ou égale à 0,3 (30 %).
3. (a) Conjecturez le tableau de variation de $f : \left\{\begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{\sqrt{x}} \end{array}\right.$.
   (b) D'après le tableau de variation précédent, si on suppose $n \geq 25$, quelle est l'amplitude maximale de I.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
import math
print("Amplitude de l'intervalle de fluctuation des
  frequences")
r=eval(input("r=?"))
n=1
while 2/math.sqrt(n)>r:
  n=n+1
print(n)
```

Télécharger le code.

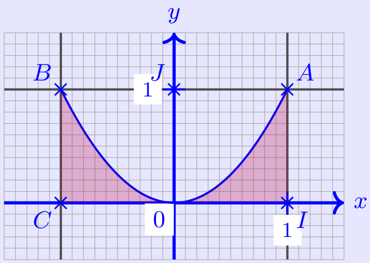
   (a) Exécutez manuellement l'algorithme pour $a = 0{,}1$.
   (b) Programmer cet algorithme.
   (c) Une entreprise de sondage souhaite savoir le nombre de personnes qu'elle doit interroger pour confirmer un résultat avec une marge d'erreur de 2,5 % puis 1 %. Utilisez le précédent programme pour répondre à cette question.

Exercice 15.

Il s'agit d'un problème de quadrature, *i.e.* un problème de calcul d'aire.

On considère l'arc de parabole $\mathscr{P}$ qui est la courbe représentative de la fonction f : $\begin{cases} [-1{,}1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ dans un repère orthonormé (O,I,J). Notons $A(1;1)$, $B(-1;1)$ et $C(-1;0)$.

L'objectif de cet exercice est d'obtenir une valeur approchée de l'aire comprise entre $\mathscr{P}$ et l'axe des abscisses (partie colorée sur la figure ci-dessous).



Nous allons faire apparaître 100 points $M(x;y)$ au hasard dans le rectangle $IAJO$ et regarder la proportion de points qui se trouvent dans la partie colorée. Le point $M(x;y)$ est dans la partie colorée si et seulement si $y < x^2$.

1. Justifiez que $A \in \mathscr{P}$ et $B \in \mathscr{P}$.
2. Nous utilisons le programme suivant (rédigé en python) qui crée et teste 100 points dans le carré $IAJO$.

```python
import random
def point():
  if random.random()<random.random()**2:
    return(1)
  else:
    return(0)
n=0
sous=0
while n<100:
  sous=sous+point()
  n=n+1
print(sous)
```

Télécharger le code.

Remarque : random.random() est un nombre aléatoire entre 0 et 1.

(a) Dans quel cas la fonction point() renvoie-t-elle 1 ? 0 ? Comment l'interpréter pour le graphique ?

(b) Combien vaut n à la fin de l'algorithme ? Qu'est-ce que n ?

(c) Que désigne la variable *sous* ?

(d) Programmer ce programme sur votre calculatrice. Notez et interprétez ce que renvoie ce programme.

Exercice 15. (épisode 2)

1. Le précédent programme génère un échantillon de taille 100. Déterminez l'intervalle de confiance correspondant.
2. Interprétez l'intervalle de confiance précédemment déterminé.
3. Modifiez le programme pour obtenir un échantillon de taille 1 000 et déterminez l'intervalle de confiance correspondant.
4. Répondez à la question initiale de cet exercice.

Exercice 16.