Moyenne.

Nous allons faire des rappels sur le calcul de moyenne mais aussi faire apparaître des propriétés de cet outil qui prendra, l'année prochaine une grande importance en probabilité.

Moyenne d'une série brute.

Définition 1. La *moyenne* d'une série numérique est le quotient de la somme des valeurs par le nombre de valeurs.

EXERCICE 1. Dans une petite entreprise les salaires des 7 employés sont 1 450 €, 1 530 €, 1 800 €, 1 367 €, 1 530 €, 800 € et 2 600 €. Déterminez le salaire moyen dans l'entreprise.

EXERCICE 2. Des moines décident de tout partager. Ils mettent en commun les sous dont chacun dispose : 1 523, 2 345, 600, 857, 1 765, 1 365, 1 432, 389, 1 059, 1 391, 1 432, 1 415, 1 399, 1 381, 1 390, 1 408 et 1 370. Puis il redistribuent équitablement les sous afin que chacun aille de son côté utiliser ces ressources pour des œuvres caritatives. Quelle est la part de sous que recevront chacun d'entre eux ? Comment appelle-t-on en statistique descriptive cette valeur ?

Moyenne d'une série regroupée par modalités.

Définition 2. Lorsqu'une série est regroupée par modalités et série des effectifs

Modalités	x_1	x_1	...	x_p
Effectifs	n_1	n_2	...	n_p

pour calculer la moyenne nous utiliserons la formule de la *moyenne pondérée* $\overline{x} = \frac{n_1 \cdot x_1 + \cdots + n_p \cdot x_p}{n_1 + \cdots + n_p}$.

Remarques.

1. Cette formule n'est qu'une autre présentation de la moyenne que vous connaissez déjà.
2. Cette formule est encore valable si à la place des effectifs sont données des fréquences (par exemple des pourcentages). Rappel : la fréquence se calcule comme le quotient de l'effectif par l'effectif total.
3. Nous utiliserons la calculatrice pour effectuer le calcul numérique.

EXERCICE 3. Voici les notes obtenues au premier devoir de mathématiques de l'année.

Notes	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	2	1	3	6	2	2	1	1	5

Notes	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectif	1	2	1	4	2	0	1	1

1. Calculez la fréquence du mode de cette série. (Le mode est la modalité ayant l'effectif le plus important).
2. Calculez la moyenne de cette série.
3. Calculez l'étendue.

EXERCICE 4. Sur le site internet d'une enseigne de vente, on a relevé le prix (en euros) de 43 casques intra-auriculaires.

Prix, x_i	8	10	13	15	18	20	21	25
Effectif, n_i	2	2	3	15	4	15	1	1

Déterminez la moyenne de la série statistique obtenue.

EXERCICE 5. Dans une ville le nombre de véhicules par foyer est réparti de la façon suivante :

Nombre de véhicules	0	1	2	3	4
Nombre de foyers	267	3 402	19 203	20 471	1 657

Calculez le nombre moyen de véhicules par foyer.

$\overline{x} \approx 2{,}411$.

EXERCICE 6. On sait que la moyenne de la série est de 2,85.

Valeur	1	2	3	4	5	Total
Effectif	a	5	6	b	2	20

Calculez les nombres entiers a et b.

Séries regroupées par classes.

Définition 3. En statistiques, les *classes* sont des intervalles disjoints dans lesquels sont regroupés les valeurs (modalités) de la série.

Remarques.

1. Lorsque la série comporte un très grand nombres de modalités (valeurs distinctes de la série), regrouper par modalités ne simplifie pas la situation. C'est dans ce cas que l'on regroupe la série par classe.
2. Les classes sont aussi utilisée pour collationner des résultats en petits groupe avant de les réunir tous, complètement.
3. Nous manipulerons la classe comme une modalité.
4. Nous associerons à la série des classes la série des effectifs (ou des fréquences) ainsi que des effectifs cumulés croissants (ou des fréquences cumulées croissantes).
5. Les classe sont des intervalles qui n'ont pas nécessairement la même amplitude.

Exemples.

1. La série d'entiers 4, 6, 5, 8, 3, 2, 1, 3, 4, 5, 5 peut être regroupée avec des classe comme ceci :

Classe	$[0;3[$	$[3;5[$	$[5;10]$
Effectifs	2	4	5

Proposition 1. Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ la moyenne d'un série regroupant $n_1 \in \mathbb{N}$ valeurs et $x_2 \in \mathbb{R}$ celle d'une série regroupant $n_2 \in \mathbb{N}$ valeurs. La moyenne $\overline{x}$ de la série série obtenue en regroupant les deux précédentes est : $\overline{x} = \frac{n_1x_1+n_2x_2}{n_1+n_2}$.

Exemples.

1.

EXERCICE 7.

EXERCICE 8.

Moyenne des séries regroupées par classes avec répartition uniforme.

Définition 4. La *moyenne* d'une série uniformément répartie regroupée par classes est la moyenne pondérée de la série des *centres des classes* et des effectifs (ou fréquences associées).

Remarques.

1. Les centres des classes sont les centres des intervalles, ce sont donc les moyennes des bornes des classes : par exemple 4,5 est le centre de $[2;7[$.

Exemples.

1. Voici le temps d'attente relevés à la caisse d'une boutique (nous admettrons que la répartition des temps d'attente est uniforme) :

Temps (en minutes)	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;20[$
Nombre de clients	19	4	1

Les centres des classes sont $\overline{x}_1 = \frac{0+5}{2} = 2{,}5$, $\overline{x}_2 = \frac{5+10}{2} = 7{,}5$ et $\overline{x}_3 = \frac{10+20}{2} = 15$.
Alors la moyenne est

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{19 \times 2{,}5 + 4 \times 7{,}5 + 1 \times 15}{19 + 4 + 1} \\ &\approx 3{,}854\end{aligned}$$

Le temps d'attente est, en moyenne, de 3,8 minutes.

EXERCICE 9. On a relevé les distances parcourues par deux joueurs de football durant le dernier championnat.

Joueur 1

Distance en km	8	8,5	9	9,5	10	10,5
Nombre de matchs	8	7	3	10	2	8

Joueur 2

Distance en km	8	8,5	9	9,5	10	10,5
Nombre de matchs	0	9	14	7	7	1

1. Représentez sur un même graphique les diagrammes en bâtons associés à ces deux tableaux.
2. Calculez la moyenne des deux joueurs.
3. Déterminez une caractéristique de dispersion de ces deux joueurs.
4. En quoi ces joueurs se distinguent-ils ?

EXERCICE 10. Voici le détail des livraisons effectuées par une grande surface de meubles au cours de l'année.

Distance en km	$[0; 5[$	$[5; 10[$	$[10; 15[$	$[15; 20[$	$[20; 25[$	$[25; 30[$	$[30; 35[$	$[35; 60[$
Nombre de livraisons	50	250	500	800	700	650	320	230

Le gestionnaire étudie l'équilibre budgétaire du service des livraisons.

1. Actuellement il est facturé au client uniquement un forfait de 18 € par livraison et le gestionnaire estime que le coût du kilomètre est de 0,95 €.
   (a) Calculez l'effectif total et en déduire la recette des livraisons.
   (b) Estimez le coût total engagé pour assurer toutes les livraisons en utilisant les centres des classes.
   (c) Montrez que le service des livraisons est déficitaire.
2. Le gestionnaire décide de regrouper les livraisons en trois classes : $[0; 15[$, $[15; 30[$ et $[30; 60[$. Le forfait de livraison sera de 17 € pour la première tranche et 21 € pour la deuxième. Quel forfait minimal (en euro entiers) faut-il fixer pour les livraisons éloignées pour que le service des livraisons soit bénéficiaire ?

Linéarité de la moyenne.

Proposition 2. Soient $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une série statistique numérique de moyenne $\overline{x}$, a et b des nombres réels. La série $(ax_i + b)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ a pour moyenne : $\overline{ax+b} = a\overline{x} + b$.

Démonstration. La série (x) considérée peut toujours est regroupée par modalités :

Valeurs x_i	x_1	x_2	...	x_p
Effectifs n_i	n_1	n_2	...	n_p

où $p \in \mathbb{N}$.

Alors pour la série $(ax+b)$:

Valeurs ax_i+b	ax_1+b	ax_2+b	...	ax_p+b
Effectifs n_i	n_1	n_2	...	n_p

On en déduit la moyenne de cette série :

$$\begin{aligned}
\overline{ax+b} &= \frac{n_1(ax_1+b)+n_2(ax+b)+\cdots+n_p(ax+b)}{n_1+n_2+\cdots+n_p} \\
&= \frac{n_1ax_1+n_1b+n_2ax_2+n_2b+\cdots+n_pax_p+n_pb}{n_1+n_2+\cdots+n_p} \\
&= \frac{n_1ax_1+n_2ax_2+\cdots+n_pax_p+n_1b+n_2b+\cdots+n_pb}{n_1+n_2+\cdots+n_p} \\
&= \frac{a(n_1x_1+n_2x_2+\cdots+n_px_p)+b(n_1+n_2+\cdots+n_p)}{n_1+n_2+\cdots+n_p} \\
&= a\frac{n_1x_1+n_2x_2+\cdots+n_px_p}{n_1+n_2+\cdots+n_p}+b\frac{n_1+n_2+\cdots+n_p}{n_1+n_2+\cdots+n_p} \\
&= a\overline{x}+b
\end{aligned}$$

Exemples.

1. Si la moyenne à une évaluation est de 12 et que l'enseignant ajoute 3 à la note de chaque élève alors la nouvelle moyenne sera de 12 = 3.
2. Si la moyenne à une évaluation est de 12 et que l'enseignant double la note de chaque élève alors la nouvelle moyenne sera de 2×12.

Remarques.

1. Nous dirons que la moyenne est linéaire.

EXERCICE 11. Un professeur note sur 100 ses évaluations. Un élève a obtenu une moyenne de 60 points pour ses quatre premiers contrôles. Pour son cinquième contrôle sa note est de 80 points. Quelle est la moyenne de l'élève après les cinq contrôles ?

EXERCICE 12. Un professeur a noté des devoirs sur 40. La moyenne de la classe est $m = 18$.

1. Sur les copies, ce professeur a écrit les notes sur 20.
   (a) Quelle opération a-t-il effectué sur chacune des notes pour obtenir la notation sur 20 ?
   (b) Déduisez-en la moyenne $\overline{x}$ des notes sur 20.
2. Trouvant la moyenne trop faible, le professeur décide d'ajouter un point sur 20 a tous les élèves.
   (a) Exprimez la nouvelle note y d'un élève quelconque en fonction de la note x sur 20 qu'il avait obtenu.
   (b) Quelle est alors la nouvelle moyenne (sur 20) de la classe à ce devoir ?

EXERCICE 13. Le tableau suivant donne la répartition des salaires des employés d'une entreprise.

Salaire (en €)	1 100	1 200	1 500	2 000	3 500	5 000
Effectif	12	14	13	5	5	1

1. Calculez le salaire moyen dans cette entreprise.
2. Le directeur financier propose d'augmenter tous les salaires de 40 €. Quel sera alors le nouveau salaire moyen ?
3. Le PDG de l'entreprise, de son côté, préfère une augmentation de 2 % de tous les salaires.
   Quel sera le nouveau salaire moyen ?

4. Quel est le choix le plus intéressant pour le PDG ? pour les employés dont le salaire est le plus bas ?

EXERCICE 14. Dans le jury n°1, la moyenne des copies est de 12 sur 20 et l'étendue est égale à 8. Dans le jury n°2, la moyenne des copies est de 10 sur 20 et l'étendue est égale à 10.

1. Si le jury n°2 augmente chaque note de 2 points, quelle sera la moyenne de ses copies ? Et l'étendue ?
2. Si le jury n°2 augmente chaque note de 20 % points, quelle sera la moyenne de ses copies ? Et l'étendue ?
3. Si le jury n°2 diminue ses notes de 20 % puis leur ajoute 4 points quelle sera la moyenne de ses copies ? Et l'étendue ?
4. Dans le jury n°3 la moyenne est de 14 et l'étendue est de 5. Quelles opérations peut-on effectuer sur les notes pour obtenir la même moyenne et la même étendue que dans le jury n°1 ?

Écart-type.

Définition 5. La *variance*, notée V et donnée par $V(x) = \frac{n_1(\overline{x}-x_1)^2+n_2(\overline{x}-x_2)^2+\cdots+n_p(\overline{x}-x_p)^2}{n_1+n_2+\cdots+n_p}$.
L'*écart type*, noté σ, est donné par : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$.

Remarques.

1. L'écart-type représente l'éloignement (écart) moyen des valeurs avec la moyenne. Plus l'écart-type est grand plus les valeurs sont dispersées autour de la moyenne.
2. Variance et écart-type sont des indicateurs de dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne.
3. Une grande proportion de données se trouve dans l'intervalle centré sur la moyenne et de rayon 2σ. Ceci permet d'enlever les valeurs extrêmes de la série (très petites et très grandes) souvent qualifiées d'aberrantes.
4. Nous pourrions être tentés de définir l'écart-type comme la moyenne des écarts par rapport à la moyenne (sans mettre au carré donc) mais cela donne toujours 0. Il a donc fallu considérer les carrés des écarts.
5. Pourquoi ne pas se contenter de la variance ? Par ce que la variance est dans une unité étrange. Si la série représente des prix, la variance s'exprime en euro au carré (?). Pour obtenir des euros il faut donc considérer la racine carrée et donc calculer l'écart-type.
6. Pour calculer l'écart-type vous userez de la calculatrice (ou du tableur) et non de la formule.

Exemples.

1. Pour déterminer la moyenne et l'écart-type de la série

Valeurs x_i	2	4	5	7	8	9
Effectif n_i	4	2	2	2	1	1

On obtient avec la calculatrice la moyenne : $\overline{x} = 4{,}75$ et l'écart-type $\sigma(x) \approx 2{,}4195$.

EXERCICE 15. On recommence plusieurs fois l'expérience qui consiste à lancer simultanément 3 pièces de monnaies et à noter le nombre de côté pile obtenus. Voici les résultats relevés.

Nombre de pile	0	1	2	3
Effectif (nombre de lancers)	2	9	11	3

1. Quel est l'effectif total de cette série ?
2. Calculez la moyenne de série statistique.
3. Calculez la variance de cette série statistique, puis son écart-type, arrondi à 0,1 près.

EXERCICE 16. Julien est animateur dans un centre aéré tous les mercredis. En début d'année, des groupes d'enfants sont constitués et pris en charge par les différents animateurs.

Le directeur sait que Julien préfère s'occuper d'enfants d'âges voisins de 6 ans. Il lui propose de choisir entre deux groupes et lui soumet les informations ci-contre. Quel groupe Julien va-t-il choisir ?

	Groupe 1	Groupe 2
Moyenne	6 ans	7 ans
Écart-type	5 ans	1 an

EXERCICE 17.

1. Un régleur tourneur a reçu comme instruction d'affiner les réglages de son tour s'il observe, dans un échantillon de 20 pièces usinées choisies aléatoirement, l'un des cas suivants.
   - Moins de 68 % des pièces ont un diamètre qui appartient à l'intervalle $[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma]$.
   - Plus de 60 % des diamètres sont supérieurs au diamètre moyen de l'échantillon.

   À 17 h, il relève les diamètres (en cm) suivant.

   23,5 ; 23,8 ; 24,7 ; 25,1 ; 25,1 ; 25,1 ; 25,2 ;
   25,2 ; 25,3 ; 25,3 ; 25,4 ; 25,4 ; 25,4 ; 25,5 ;
   25,8 ; 25,9 ; 26,0 ; 26,0 ; 26,3 ; 27,1.

   Avec sa calculatrice il obtient

   ```
   x̄=25.355
   Σx=507.1
   Σx²=12869.35
   Sx=0.7890533969
   σx=0.7690741187
   n=20
   ```

   Ce régleur doit-il modifier les réglages de sa machine ?
2. Une erreur de calibrage du tour modifie la série. Chaque mesure doit être amputée de 0,1 cm. Cela modifie-t-il la décision du régleur ? Justifiez.

Exercices.

EXERCICE 18. En 2010 un recensement de la population en Corse a permis de répertorier l'âge des femmes.

Age	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[
Effectif	16 115	17 476	17 698	19 574

Age	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[
Effectif	22 222	21 455	18 106	12 537

Age	[80 ; 90[	[90 ; 100[	[100 ; 110[
Effectif	5 692	768	22

Calculez la moyenne et l'écart-type de cette série.

EXERCICE 19. Les tailles sont exprimées en centimètre.

Partie A : à la maternité « Beaux jours ».

Sur la totalité du mois de janvier 2012, il y a eu 57 nouveau-nés à la maternité « Beaux jours ». Leur taille est donnée dans le tableau ci-dessous.

Taille	46	47,5	48	48,5	49	49,5	50
Effectifs	1	2	3	5	5	7	9

Taille	50,5	51	51,5	52	52,5	53
Effectifs	8	7	5	2	2	1

1. Calculer la moyenne puis la médiane des tailles de ces 57 nouveau-nés en précisant la démarche.
2. Calculer le pourcentage de nouveau-nés ayant une taille inférieure ou égale à 49 cm. Donner la réponse arrondie à 0,1 %.
3. Parmi toutes ces tailles, déterminer la plus petite taille t telle qu'au moins les trois quarts des nouveau-nés aient une taille inférieure ou égale à t cm. Quel paramètre de la série des tailles a été ainsi trouvé ?

Partie B : à la maternité « Bon accueil ».

L'étude statistique de la taille des 64 nouveau-nés durant le même mois de janvier 2012 à la maternité « Bon accueil » a donné les résultats suivants : Minimum : 46, Maximum : 53, Moyenne : 49,3, Médiane : 49, 1^{er} quartile : 48, 3^{e} quartile : 50,5.

1. Des deux maternités, une seule possède un service pour les naissances prématurées. Les résultats précédents permettent-ils de trouver laquelle ? Justifier votre réponse.
2. Les deux maternités sont les seules de la ville.
   (a) Calculer la moyenne des tailles des nouveau-nés, en janvier 2012, dans les maternités de cette ville.
   (b) Les données de l'énoncé permettent-elles de déterminer la médiane des tailles des nouveau-nés des deux maternités réunies ? Si oui, la déterminer ; sinon expliquer pourquoi.

EXERCICE 20. Sébastien, étudiant de 19 ans, veut s'inscrire dans une station balnéaire pour un séjour d'été où il aurait des chances de rencontrer des jeunes femmes de son âge.

Prenant quelques références, les stations lui fournissent la moyenne d'âge des inscrites.

Station A : 19 ans. Station B : 31 ans.

Sans hésiter, il s'inscrit dans la station A !

1. Le choix de Sébastien est-il judicieux ?

Les tableaux ci-dessous indiquent les âges des inscrites dans les deux stations.

Station A

Âge	Effectif
2	3
4	1
5	1
7	1
10	1
11	2
34	1
35	2
50	1
58	1

Station B

Âge	Effectif
18	1
19	5
20	2
45	2
46	1
47	1
48	1
50	1

2. Pour les deux stations :
   (a) donner la fréquence de la valeur 19 ;
   (b) calculer la médiane et les quartiles ;
   (c) calculer l'étendue ;
   (d) déterminer la modalité de la plus grande fréquence.
3. Finalement, le choix de Sébastien est-il judicieux ? Argumenter.

4. Écrire l'algorithme que Sébastien a utilisé pour calculer la fréquence de la valeur 19.

EXERCICE 21. Un hôpital cherche à tester l'efficacité d'un nouveau traitement oral pour des patients atteint de diabète de type 2. Pour cela , il étudie le taux de sucre dans le sang (glycémie en g/L) à jeun d'un groupe de 50 patients.

Les résultats sont répertoriés dans le tableau suivant.

1,73	2,07	1,53	1,47	2,05	1,41	1,84	1,97	1,82	1,8
1,53	1,6	2,05	1,53	1,69	1,61	1,92	1,45	1,68	1,94
1,62	1,73	1,47	1,34	1,53	1,61	1,78	1,64	1,61	1,61
1,82	2,02	2,02	1,73	1,77	1,99	1,68	1,6	1,9	1,39
1,7	1,45	1,68	1,82	1,96	1,91	1,7	1,6	1,48	1,56

1. Complétez le tableau d'effectifs du groupe en regroupant les résultats en classe d'amplitude 0,1.

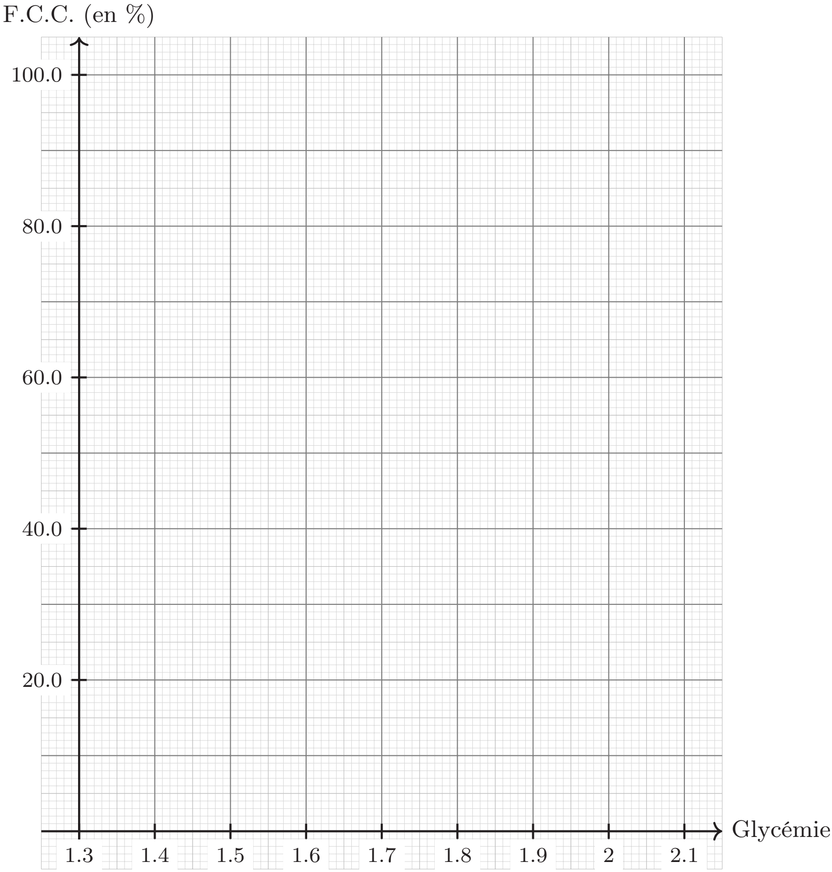
Glycémie	[1,3; 1,4[	[1,4; 1,5[	[1,5; 1,6[	[1,6; 1,7[
Effectifs				

Glycémie	[1,7; 1,8[	[1,8; 1,9[	[1,9; 2[	[2; 2,1[
Effectifs				

2. Déduisez-en la moyenne de la série regroupée par classe.
3. Construisez l'histogramme correspondant.

4. (a) Dressez le tableau des fréquences et fréquences cumulées croissantes de la série des classes.
   (b) Déterminez la classe médiane.

(c) Dessinez le polygone des fréquences cumulées croissantes.



(d) Par lecture graphique sur le polygone des fréquences cumulés croissantes déterminez la médiane de la série.

EXERCICE 22. Une étude menée auprès des consommateurs mesure la durée de vie d'ampoules de deux marques différentes que l'on souhaite comparer.

Les données recueillies sont les suivantes :

Durée de vie en milliers d'heures.	[0 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12]
Nombre d'ampoules Fiateloux	12	20	34	60	75
Nombre d'ampoules Ténébraé	234	432	309	456	607

1. Peut-on comparer les nombres d'ampoules des deux marques entre eux ?

2. Faîtes un tableau, pour chacune des marques, en remplaçant le nombre d'ampoules par la fréquence.
3. Dessinez dans un repère les deux polygones des fréquences cumulées croissantes.
4. Un chef d'entreprise souhaite acheter les ampoules qui dure le plus longtemps en se basant sur la médiane. Quelle marque va-t-il choisir ?

EXERCICE 23. En 2016, une entreprise employait deux cadres et six ouvriers.

Catégorie	Cadre	Ouvrier
Salaire (2016)	6 000 €	1 400 €

1. Calculez le salaire moyen d'un employé.
2. Les résultats de l'entreprise étant bons, le chef d'entreprise décide d'augmenter tous les salaires de 10 % et d'engager cinq ouvriers supplémentaires. Un employé affirme : « Malgré nos augmentations, le salaire moyen de l'entreprise a baissé. » S'est-il trompé ? Justifiez.

EXERCICE 24.

Exercice 29 page 19 du manuel Sésamath questions 1 et 2 : regrouper les données par classe (super long), moyenne pondérée d'une série regroupée par classes.

EXERCICE 25.

Exercice 30 page 19 du manuel Sésamath : moyenne pondérée d'une série regroupée par classes.