

Populations.

Fréquence d'une sous-population par rapport à une population.

Nous allons préciser les proportions intervenant dans le domaine des statistiques.

En statistique une *population* est un ensemble de trucs (des hommes, des animaux, des objets, ...) tous de même nature et que nous souhaitons étudier. Les trucs étudiés sont appelés des individus.

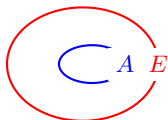
Le plus souvent il s'agira de collecter des données sur un *caractère* (un aspect des individus : taille, poids, couleur des chaussures, ...) des individus de la population. L'ensemble des données constituant alors une *série statistique*.

Si dans une première population de 12 individus il y a 10 filles et dans une seconde population de 24 individus il y en a 12, dans quelle population y a-t-il le plus de filles ? La question est trop imprécise et deux réponses sont possibles :

- il y a plus de filles dans la seconde population que dans la première,
- il y a plus de filles dans la première population par rapport au nombre d'élèves de la classe.

Dans le second cas nous comparons des fréquences.

Définition 1. Soient E une population d'individus et A une sous-population de la population E .



Nous appellerons *fréquence de la sous-population A par rapport à la population E* (ou *fréquence conditionnelle de A sachant E*) le nombre $P_E(A) := \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$.

Exemples.

1. Lors de tests sur un échantillon de 1240 personnes, on observe que 356 sont séro-positives. Donc la fréquence, en pourcentage, de la population qui peut être estimée séro-positive est de $\frac{356}{1240} \times 100 \approx 28,71$ (en arrondissant au centième).

Remarques.

1. On retrouve la formulation habituelle : $\frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$.
2. Nous constatons la même formule que pour les probabilités lors de la situation d'équiprobabilité.
3. Il est bien sûr possible d'exprimer cette proportion en pourcentage. Attention au pourcentage d'augmentation ou de diminution qui n'a rien à voir avec une fréquence. Nous rencontrerons une autre formulation : la proportion d'une sous-population dans une population.
4. La fréquence d'une sous-population dans une population est un nombre compris entre 0 et 1. Le pourcentage d'une sous-population dans une population est un nombre compris entre 0 et 100.
5. En statistique E est appelée la *population de référence*.
6. En mathématiques pures plutôt que de parler de population nous parlerons d'*ensemble fini*. Le terme *cardinal* est préféré à effectif.
7. La notation mathématique pour indiquer que A est une sous-population de E est : $A \subset E$. Dans ce cas on dit que A est *inclus* dans E .

EXERCICE 1. Dans une classe de première de 35 élèves, 9 élèves font du ski. Calculez le pourcentage d'élèves de la classe qui font du ski arrondi à 10^{-2} près.

EXERCICE 2. Une salle de spectacle contient 9 000 places assises et 21 000 places debout.

1. Calculez le pourcentage de places assises.
2. Déterminez le pourcentage de places debout.

EXERCICE 3.

1. Dans un petit port, les cinq-sixièmes des 720 habitants vivent de la pêche. Combien d'habitants vivent de la pêche ?
2. Dans un village voisin, 697 habitants vivent de l'agriculture, ce qui représente 82% de la population. Combien y a-t-il d'habitants dans ce village ?

EXERCICE 4. Un marchand a des crayons bleus, des crayons rouges et crayons verts. Les crayons bleus représentent 53 % de la totalité des crayons. Les crayons rouges représentent les $\frac{3}{10}$ de la totalité des crayons.

1. Les crayons verts représentent un pourcentage de la totalité des crayons. Quel est ce pourcentage ?
2. En tout le marchand a 300 crayons. Combien a-t-il de crayons bleus ?

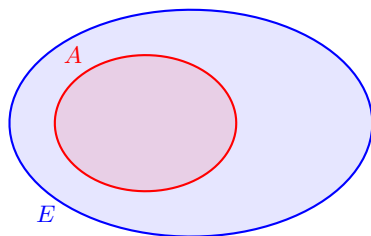
EXERCICE 5.

1. Une année le taux de réussite au baccalauréat technologique est de 79,7 %, ce qui représente 129 979 candidats reçus.
Calculez le nombre de candidats à cet examen.
2. Dans un lycée le taux de réussite est de 95 %, et il y a eu 12 refusés.
Calculez le nombre de candidats dans ce lycée.

Ensembles, sous-ensembles, données croisées.

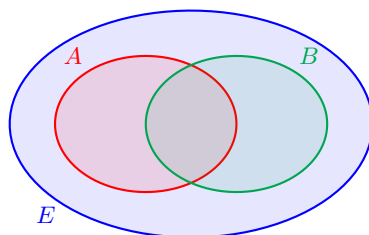
Quelques rappels.

Définition 2. Nous dirons que A est un *sous-ensemble* de E , ou une *partie* de E si tous les éléments qui appartiennent à A appartiennent aussi à E . Dans ce cas nous noterons : $A \subset E$.



Remarques.

1. $A \subset B$ se lit « A est inclus dans B ».
2. La représentation typique illustrant deux sous-ensembles A et B de l'ensemble E consiste au diagramme de Venn suivant.



Cette schématisation permet de comprendre les diverses situation que nous rencontrons.

Exemples.

1. Un sondage dans un lycée donne (et nous rencontrons ici notre premier *tableau de données croisées*) :

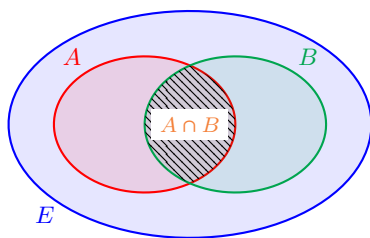
	Pratiquent un sport	Ne pratiquent pas de sport	Total
Fumeurs	40	120	160
Non fumeurs	430	210	640
Total	470	330	800

L'ensemble des élèves fumeurs est inclus dans l'ensemble des lycéens. L'ensemble des élèves fumeurs contient 160 éléments.

L'ensemble des élèves non fumeurs et qui ne pratiquent pas de sport est inclus dans l'ensemble des élèves non fumeurs. Le cardinal de l'ensemble des élèves non fumeurs et qui ne pratiquent pas de sport est 210.

2. L'ensemble des Réunionnais est inclus dans l'ensemble des Français.
3. Plus généralement en reprenant la terminologie des statistiques : une sous-population est incluse dans une population.
4. $\{3; a\} \subset \{3; b; 4; a\}$ mais $\{3; a\} \not\subset \{3; b; 4\}$.

Définition 3. L'ensemble des éléments communs à A et B , c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et B , est appelé l'*intersection de A et B* et est noté $A \cap B$.



Remarques.

1. $A \cap B$ se lit « A inter B ».

Exemples.

1. Reprenons l'exemple ci-dessus :

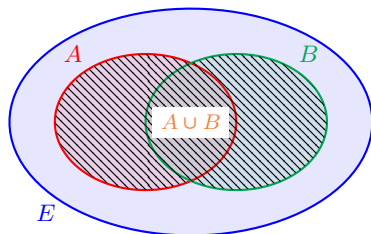
	Pratiquent un sport	Ne pratiquent pas de sport	Total
Fumeurs	40	120	160
Non fumeurs	430	210	640
Total	470	330	800

L'intersection de l'ensemble des fumeurs et de l'ensemble des non sportifs est un ensemble qui contient 120 éléments.

2. L'intersection entre l'ensemble des élèves de premières et l'ensemble des élèves du lycée étudiant l'allemand est l'ensemble formé des élèves de première qui étudient l'allemand.
3. L'intersection entre l'ensemble des nombres pairs et celui des nombres impairs ne contient aucun élément. Nous dirons qu'il s'agit de l'*ensemble vide* et nous le noterons $\emptyset$.
4. L'intersection ente l'ensemble des nombres positifs et négatifs est un ensemble qui ne contient que 0 : $\{0\}$.

5. $\{1; 2; a; b\} \cap \{2; 3; b; z\} = \{2; b\}$.

Définition 4. L'ensemble de tous les éléments qu'ils soient pris dans A ou dans B est appelé la *réunion de A et B* et est notée $A \cup B$.



Remarques.

1. $A \cup B$ se lit « A union B ».

Exemples.

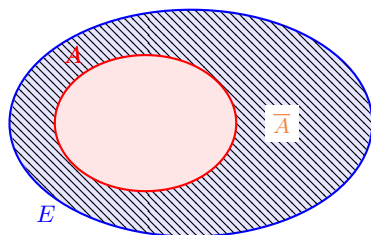
1. Reprenons l'exemple ci-dessus :

	Pratiquent un sport	Ne pratiquent pas de sport	Total
Fumeurs	40	120	160
Non fumeurs	430	210	640
Total	470	330	800

La réunion de l'ensemble des élèves sportifs ou non fumeur contient : $40+430+210 = 680$ élèves.

2. La réunion des élèves qui étudient l'anglais, l'allemand, l'espagnol ou le chinois est l'ensemble de tous les élèves du lycée.
3. La réunion de l'ensemble des nombres pairs et celui des nombres impairs contient tous les nombres entiers.
4. $\{1; 2; a; b\} \cup \{2; 3; b; z\} = \{1; 2; a; b; 3; z\}$.

Définition 5. Le *complémentaire de A dans E* est formé de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A . On le note $\bar{A}$ ou encore $E \setminus A$.



Remarques.

1. $\bar{A}$ se lit « le complémentaire de A ».
2. $E \setminus A$ se lit « le complémentaire de A dans E » ou encore « E privé de A ».

Exemples.

1. Reprenons l'exemple ci-dessus :

	Pratiquent un sport	Ne pratiquent pas de sport	Total
Fumeurs	40	120	160
Non fumeurs	430	210	640
Total	470	330	800

Le complémentaire de l'ensemble des élèves fumeurs est l'ensemble des élèves non fumeurs.

Le complémentaire de l'ensemble des élèves fumeurs et sportifs est la réunion de l'ensemble des élèves non sportifs et non fumeurs. Il a donc pour cardinal : $430+210+120 = 760$.

2. Le complémentaire de l'ensemble des nombres pair (dans l'ensemble des nombres entiers) est l'ensemble des nombres impairs.
3. Le complémentaire de l'ensemble des filles de la classe est l'ensemble des garçons de la classe.
4. Le complémentaire de $\{1; 2; a; b\}$ dans $\{1; 2; 3; a; b; c\}$ est $\{3; c\}$.

EXERCICE 6. Le tableau suivant donne le mode de transport des 1292 salariés d'une entreprise pour se rendre à leur travail. On note :

- A l'ensemble des employés qui utilisent les transports en commun.
- B l'ensemble des employés qui viennent à pied.
- C l'ensemble des employés qui utilisent leur voiture.
- H l'ensemble des hommes.

	H	$\overline{H}$
A	210	380
B	52	80
C	450	120

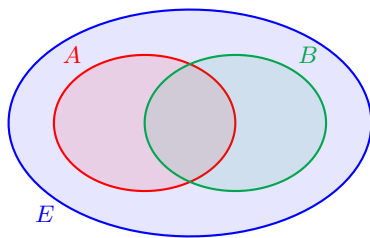
1. Recopiez ce tableau en indiquant le pourcentage d'employés plutôt que le nombre d'employés.
2. Expliquez ce qu'est l'ensemble $\overline{H}$.
3. Calculez la proportion d'hommes dans l'entreprise.
4. Expliquez ce qu'est $A \cap H$ puis calculez le pourcentage d'employés dans cet ensemble.
5. Expliquez ce qu'est $C \cap \overline{H}$ puis calculez le pourcentage d'employés dans cet ensemble.
6. Expliquez ce qu'est $\overline{C}$ puis calculez le pourcentage d'employés dans cet ensemble.

Proposition 1. Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E .

- (i) $P_E(\overline{A}) = 1 - P_E(A)$.
- (ii) Si A et B sont quelconques, alors $P_E(A \cup B) + P_E(A \cap B) = P_E(A) + P_E(B)$.
- (iii) Si A et B sont *disjoints* alors $P_E(A \cup B) = P_E(A) + P_E(B)$.

Démonstration. Remarquons que le (iii) se déduit du (ii).

Pour justifier le (i) et le (ii) nous raisonnerons sur le diagramme de Venn.



EXERCICE 7. Un institut de sondage a interrogé 800 personnes des la manière suivante :

- 25 % des personnes interrogées habitent en zone rurale, les autres en zone urbaine ;
- 60 % des personnes interrogées ont été consultées par téléphone, les autres personnes ayant été interrogées en « face à face » par un enquêteur ;

- 55 % des personnes habitant en zone urbaine ont été consultées par téléphone.

1. Reproduisez et complétez le tableau d'effectifs suivant :

	Habitant en zone rurale	Habitant en zone urbaine	Total
Personnes interrogées par téléphone			
Personnes interrogées en « face à face »			
Total	200		800

2. (a) Calculez la proportion de personnes habitant en zone urbaine parmi celles qui ont été consultées par téléphone : donner le résultat sous la forme d'un nombre décimal, puis sous la forme d'un pourcentage.
- (b) Calculez la proportion de personnes habitant en zone urbaine parmi celles interrogées en « face à face » : donner le résultat sous la forme d'un nombre décimal arrondi à 10^{-4} près, puis sous la forme d'un pourcentage.
- (c) L'ordre des proportions (ou fréquences) obtenues en (a) et en (b) est-il le même que celui des effectifs des sous-populations correspondantes ?

EXERCICE 8. Un restaurant sert 600 couverts par service, en proposant un menu à 16 euros et un menu à 24 euros. Pour l'inauguration de son restaurant, le gérant offre à chacun de ses clients soit un café, soit un apéritif.

- 60 % des clients ont choisi un café, les autres un apéritif.
- La moitié des clients ont choisi un menu à 24 euros.
- Parmi ceux qui choisissent le menu à 24 euros, 75 % ont choisi un café.

1. Complétez après l'avoir reproduit le tableau suivant :

	Menu à 16 €	Menu à 24 €	Total
Clients ayant choisi un café			360
Clients ayant choisi un apéritif			
Total			600

2. On note A la sous-population des clients ayant choisi un menu à 16 euros et B la sous-population des clients ayant choisi un apéritif.

(a) Définissez par une phrase les sous-populations $A \cap B$ et $A \cup B$.

Dans ce qui suit les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

- (b) Calculez les proportions (ou fréquences) respectives, notées $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$, des sous-populations A , B , $A \cap B$ et $A \cup B$ dans la population des 600 couverts.
- (c) Calculez $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Que remarquez-vous ?
- (d) On note C la sous-population des clients ayant choisi un café. On note $P(C)$ la proportion de la sous-population C dans la population des 600 couverts. Les deux sous-populations A et B sont-elles disjointes ? Même question pour les deux sous-populations B et C . Calculez $P(B) + P(C)$.

EXERCICE 9. Un magasin vend deux types de téléphones mobiles : des modèles m_1 et des modèles m_2 . Ce magasin propose deux types de forfait mensuel : un forfait 1 et un forfait 2. Le service commercial effectue une enquête sur un échantillon de 2000 clients ayant acheté dans ce magasin un téléphone et un seul, et ayant opté pour un seul des forfaits proposés. Sur les 2000 clients interrogés, 1 200 ont acheté le modèle m_1 et 960 ont choisi le forfait F_1 . Parmi les clients ayant acheté le modèle m_1 , 32 % ont pris le forfait F_1 .

1. Complétez après l’avoir reproduit, le tableau d’effectifs suivant :

	Modèle m_1	Modèle m_2	Total
Forfait 1			960
Forfait 2			
Total	1 200		2 000

2. On note F_1 la sous-population des clients interrogés ayant choisi le forfait 1 et M_2 la sous-population ayant choisi le modèle m_2 .

- (a) Calculez, sous la forme d’un nombre décimal, la proportion $P(F_1)$ de clients interrogés qui ont choisi le forfait 1.
- (b) Calculez, sous la forme d’un nombre décimal, la proportion $P(M_2)$ de clients ayant choisi le modèle m_2 .
- (c) Définissez par une phrase en français les sous-populations $F_1 \cap M_2$ et $F_1 \cup M_2$.
- (d) Calculez, sous la forme d’un nombre décimal, la proportion $P(F_1 \cap M_2)$ de clients qui appartiennent à la sous-population $F_1 \cap M_2$ parmi les clients interrogés.
- (e) Déduisez de ce qui précède la proportion $P(F_1 \cup M_2)$ de clients qui appartiennent à la sous-population $F_1 \cup M_2$ parmi le clients interrogés : sous la forme d’un nombre décimal puis sous la forme d’un pourcentage.

EXERCICE 10. Le 29 mai 2005, lors du référendum français sur la constitution européenne , un institut a analysé les votes à la sortie des urnes dans une petite ville. Dans cette ville, 3 062 personnes sont inscrites sur les listes électorales. Parmi les personnes inscrites, on distingue les votants et les abstentionnistes. Dans les suffrages des votants, on considère les votes « OUI » [et les vote « NON » et les votes nuls ou blancs. Dans l’ensemble de l’exercice, les pourcentages obtenus seront arrondis à 0,1 %.

- 1. Sur les 3 062 personnes inscrites, 1 048se révèlent être des abstentionnistes. Le taux de participation au référendum correspond au pourcentage des votants parmi l’ensemble des inscrits. Déterminez ce taux de participation.
- 2. Lors du vote, 2 000 personnes ont déclaré avoir voté « OUI » ou « NON » au référendum. On considérera que leurs déclarations sont sincères. Leur répartition en pourcentage est donnée dans le tableau suivant :

Répartition en pourcentage selon les classes d’âges.		
Âge	Oui	NON
18-24 ans	7,1 %	8,9 %
25-34 ans	10,4 %	12,7 %
35-44 ans	11 %	16,8 %
45-59 ans	5,3 %	8,7 %
60-69 ans	6,3 %	5,0 %
70 ans et plus	4,4 %	3,4 %

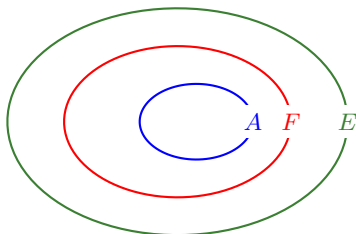
Parmi ces 2 000 personnes :

- (a) Relevez le pourcentage de personnes qui ont moins de 25 ans et qui ont voté « OUI ».
- (b) Déterminez le pourcentage de personnes ayant entre 18 et 24 ans.

- (c) Déterminez le pourcentage de personnes ayant voté « OUI ».
- (d) Déterminez le nombre de personnes ayant voté « OUI »

Produit de fréquences conditionnelles.

Proposition 2. Soient E une population d'individus, F une sous-population de E et A une sous-population de F . $P_E(A) = P_E(F) \times P_F(A)$.



Démonstration. Par définition : $p_E(F) = \frac{\#F}{\#E}$ et $p_F(A) = \frac{\#A}{\#F}$ donc :

$$\begin{aligned}
 p_E(F) \times p_F(A) &= \frac{\#F}{\#E} \times \frac{\#A}{\#F} \\
 &= \frac{\#F \times \#A}{\#E \times \#F} \\
 &= \frac{\#A}{\#E} \\
 &= p_E(A)
 \end{aligned}$$

Remarques.

1. Nous avons des inclusions successives : $A \subset F \subset E$.
2. **Pour déterminer une proportion de proportion on fait le produit des proportions.**
3. Les proportions fonctionnent de façon multiplicative. Vous retrouverez cette idée en classe de première en parlant de *principe multiplicatif*.
4. Cette proposition peut être vue comme l'application d'une proportion ($\frac{p_F(A)}{100}$) à un pourcentage ($p_E(F)$).
5. Dans cette proposition il y a deux populations de références : E et F .
6. Ce résultat n'utilise pas les effectifs des populations mais seulement les proportions. Nous utiliserons ce résultat lorsque les seules informations sont des proportions.
7. On retrouve une relation de Chasles.

Exemples.

1. 18 % des amateurs de jeux vidéos n'ont pas le bac. Parmi ceux-ci 7 % n'ont pas le brevet des collèges.
Comme : $\frac{7}{100} \times \frac{18}{100} = \frac{126}{1000} = \frac{12,6}{100}$ on peut dire que 12,6 % des joueurs de jeux vidéos n'ont pas le brevet des collèges.
2. $\frac{4}{3}$ de $\frac{9}{10}$ est donc $\frac{4}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{2}{15}$.

EXERCICE 11. Un serveur de films en streaming est composé de 30 % de films d'action et, parmi ces films d'action, 60 % sont des films avec Bruce Willis. Quelle est la proportion de films avec Bruce Willis sur le serveur ?

EXERCICE 12. Dans une classe 45 % des élèves sont des garçons et $\frac{1}{3}$ des garçons portent des lunettes. Il y a 3 garçons à lunettes dans la classe.

1. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?
2. Combien y a-t-il de filles dans cette classe ?

EXERCICE 13. Dans une société les cadres représentent 40 % des salariés et les cadres supérieurs représentent un 20 % des cadres. Quelle est la proportion de cadres supérieurs par rapport aux salariés de cette société ?

EXERCICE 14. Une société de téléphonie propose trois mode d'abonnement différents :

- forfait A : moins de 2 h de communication ;
- forfait B : moins de 4 h de communication ;
- forfait C : temps de communication illimité.

La part de clients ayant souscrit le forfait A est de 0,35 et les clients ayant choisi le forfait B représentent la moitié de la clientèle. De plus 80 % des clients ayant choisi le forfait C ont également choisi l'internet illimité.

1. Quelle est la part de clients ayant choisi le forfait illimité ? Exprimez ce résultat en pourcentage.
2. Quelle est la part des clients qui ont choisi un forfait C mais sans l'internet illimité.

EXERCICE 15. Dans cet exercice on donnera des valeurs exactes pour tous les résultats.

Lors de la dernière journée d'un championnat international d'athlétisme, les athlètes sont encouragés par 75 000 spectateurs. 70 % des spectateurs sont français et 30 % sont étrangers. De plus 85 % des spectateurs étrangers et 25 % des spectateurs français possède une licence d'athlétisme.

1. Recopiez et complétez le tableau suivant (aucune justification n'est demandée).

	Licenciés	Non licenciés	Total
Spectateurs français			
Spectateurs étrangers			
Total			

2. À l'aide des résultats obtenus précédemment, calculez sous la forme d'un nombre décimal puis sous la forme d'un pourcentage :
 - (a) la proportion de spectateurs français licenciés dans l'ensemble des 75 000 spectateurs ;
 - (b) la proportion de spectateurs étrangers non licenciés dans l'ensemble des 75 000 spectateurs ;
 - (c) retrouvez directement ces résultats sans utiliser le tableau.
3. Calculez, sous forme de pourcentage, la proportion de spectateurs licenciés dans l'ensemble des 75 000 spectateurs.

Exercices.

EXERCICE 16. Une entreprise est composée de trois services : Administratif, Logistique et Transport. 45 % des employés travaillent au sein du service Administratif et 23 % au sein du service Logistique. Une enquête effectuée sur le temps de trajet quotidien entre le domicile des employés et l'entreprise a montré que :

- 54,2 % des employés résident à moins de 30 min de l'entreprise ;
- 60 % des employés du service Logistique résident à moins de 30 min de l'entreprise ;
- 9,6 % des employés travaillent au sein du service Transport et résident à 30 min ou plus de l'entreprise.

1. Recopiez et complétez le tableau ci-dessous à l'aide des pourcentages donnés dans l'énoncé.

	Service Ad- ministratif	Service Logistique	Service Transport	Total
Résidant à moins de 30 min				
Résidant à 30 min ou plus				
Total				100

2. Détermine, au sein du service Administratif, puis au sein du service Transport, la proportion (en %) des employés qui résident à moins de 30 min de l'entreprise.
3. (a) Quel service a la plus forte proportion d'employés qui résident à moins de 30 min de l'entreprise ?
(b) Quel service a la plus forte proportion d'employés qui résident à 30 min ou plus de l'entreprise ?

EXERCICE 17. Armelle et Boris ne suivent pas les mêmes enseignements. La semaine 1, Armelle a réussi 50 % des exercices qu'elle a traités et Boris 90 % des exercices qu'il a traités. La semaine 2, Armelle a réussi 20 % des exercices qu'elle a traités et Boris 40 % des exercices qu'il a traités.

Vrai ou faux : sur l'ensemble de la quinzaine, Boris a nécessairement réussi un plus grand pourcentage d'exercices traités qu'Armelle.

EXERCICE 18. Le salaire brut mensuel de Sophie est de 13 200 €. Les cotisations salariales représentent 23 % du salaire brut. Calculez le salaire hors cotisations salariales.

EXERCICE 19. Le tableau incomplet, en question 1.(b), donne le nombre de salariés en France, en milliers, selon la catégorie et le type de contrôle de l'entreprise en 2015. *On peut traiter les questions 1. et 2. de façon indépendante.*

1. (a) En 2015, 66,8 % des salariés des ETI (entreprises de taille intermédiaire) font partie d'un groupe français. Calculer le nombre de salariés des ETI de groupes français.
(b) Compléter le tableau donné ci-dessous en arrondissant les résultats au millier près.

	Unités légales hors groupes	Groupes français	Sous contrôle d'un groupe étranger	Total
Grandes entreprises (GE)	0			4 235
Entreprises de taille intermédiaire (ETI)	154			3 657
Petites et moyennes entreprises (PME) hors microentreprises	1 669	2 255	335	4 259
Microentreprises (MIC)	2 549	177	20	2 745
Total	4 373	8 477	2 047	14 897

2. Nous noterons F l'ensemble des salariés faisant partie d'un groupe français, M l'ensemble des salariés faisant partie d'une PME et E l'ensemble de tous les salariés. Dans cette question, les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-2} .

- Calculer la proportion, $p_E(F)$, de salariés d'un groupe français parmi les salariés et $p_F(M)$ la proportion de salariés travaillant en PME parmi les salariés français.
- Exprimer $\frac{2255}{14897}$ en pourcentage et interpréter, dans le contexte de l'exercice, cette proportion.
- Calculer $p_M(F)$ et interpréter, dans le contexte de l'exercice, cette proportion.

EXERCICE 20.

Exercices 18 à 21 page 282 du manuel Indice.

EXERCICE 21.

Exercices 48 à 56 page 285 du manuel Indice.