La loi uniforme discrète.

Généralités.

Définition 1. La loi d'une expérience aléatoire est appelée *l'équiprobabilité* (ou *loi discrète uniforme*) si la distribution de probabilité entre les issues est équitable. Autrement dit toutes les issues ont la même probabilité.

Remarques.

1. Dans les exercices les situations qui seront modélisées avec l'équiprobabilité sont souvent décrites avec les termes : indiscernables, parfaitement équilibrés, et cetera.

Proposition 1. Soient Ω un univers muni de la loi d'équiprobabilité $\mathbb{P}$. $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$ quel que soit l'issue $\omega \in \Omega$.

Démonstration. Trivial.

Exemples.

1. Un lancer de pièce équilibrée pourra être modélisé avec l'univers $\Omega = \{P,F\}$, et par une équiprobabilité. Donc la probabilité d'une issue est $\frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{2}$: $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \omega & P & F \\ \hline \mathbb{P}(\omega) & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$.

EXERCICE 1. Un jeu consiste à lancer un dé parfaitement équilibré dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Quel est l'univers de l'expérience ?
2. Calculez la probabilité d'obtenir 3.
3. Calculez la probabilité de l'événement $B = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.
4. Calculez la probabilité de l'événement A :« Les issues sont des nombres pairs ».
5. Décrivez par un ensemble l'événement $A \cap B$ et déduisez en sa probabilité.
6. Déduisez des trois questions précédentes la probabilité de $A \cup B$.
7. Calculez la probabilité de $\overline{A}$.

Nous retiendrons le résultat suivant que nous utiliserons souvent dans les exercices.

Proposition 2. Soient Ω un univers muni de la loi d'équiprobabilité $\mathbb{P}$ et A un événement ($A \subset \Omega$). est $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Démonstration. Nous avons défini la probabilité d'un événement comme la somme des probabilités des issues qui le réalisent donc $\mathbb{P}(A) = \text{Card}(A) \times \frac{1}{n}$.

Remarques.

1. Ainsi les calculs de probabilités, dans le cas de l'équiprobabilité, reviennent à des questions de dénombrement.

Dénombrer avec un tableau double entrée.

EXERCICE 2. Un jeu consiste a lancer deux dés cubiques parfaitement équilibrés numérotés de 1 à 6.

1. Donnez sous forme d'un tableau l'univers associé à cette expérience.
2. Calculez la probabilité d'obtenir 6 sur les deux dés.
3. On note A : « La somme des nombres obtenus égale 3 ». Calculez la probabilité de l'événement A.
4. On note B : « le produit des nombres obtenus égale 6 ». Calculez la probabilité de l'événement B.
5. On note C : « le produit des nombres obtenus égale 7 ». Calculez la probabilité de l'événement C.
6. On note D : « la somme des nombres obtenus est strictement supérieure à 3 ». Calculez la probabilité de l'événement D.

Dénombrement avec un arbre.

EXERCICE 3. Un square est équipé de trois bancs. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard. L'objet de l'exercice est de déterminer la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte. Les trois bancs sont notés A, B et C.

1. Représentez la situation par un arbre.
2. Calculez la probabilité que les deux personnes s'assoient sur le banc A.
3. Calculez la probabilité que les deux personnes s'assoient côte à côte.

Exercices.

EXERCICE 4. On lance 3 fois une pièce bien équilibrée.

1. Représentez la situation par un arbre.
2. Quelle est la probabilité :
   (a) d'avoir 3 faces ?
   (b) que le deuxième jet soit face ?
   (c) que le troisième jet soit différent du premier ?

EXERCICE 5. Un examinateur doit interroger, dans un certain ordre, quatre candidats : Arthur, Béatrice, Chloé et David. Il doit établir une liste ordonnée de quatre noms.

1. À l'aide d'un arbre, déterminez le nombre de listes possibles.
2. L'examinateur tire la liste des quatre noms au hasard, chaque liste possible, ayant la même probabilité.
   Déterminez la probabilité de chacun des événements suivants :
   - E :« Béatrice est interrogée en premier ».
   - F :« Chloé est interrogée en dernier ».
   - G :« David est interrogé avant Béatrice ».
3. Définir par une phrase l'événement $E \cap F$ et en donner la probabilité.
4. Définir par une phrase l'événement $E \cup F$ et en donner la probabilité.

EXERCICE 6. Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix

- entre 2 entrées : Artichaut ou Betterave ;
- entre 3 plats : Cheval, Daube ou Escalope ;
- entre 2 desserts : Fromage ou Gâteau.

Un menu se compose :
— d'une entrée ;
— d'un plat ;
— d'un dessert.

1. En utilisant un arbre, représenter tous les menus.
2. Combien de menus différents sont possibles ?
3. On choisit un menu au hasard.
   Quelle est la probabilité :
   (a) qu'il comporte une escalope ?
   (b) qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?
   (c) qu'il ne comporte pas de cheval ?

EXERCICE 7. Un groupe de 4 amis, Émile, Flore, Gaston et Hélène sont dans un bateau. Ils tirent au sort celui qui va ramer et, parmi les noms restants, celui qui va écoper.

1. Représenter cette situation par un arbre.

2. Déterminer les probabilités suivantes.
   (a) C'est un garçon qui rame.
   (b) Hélène écope.
   (c) Les deux qui travaillent sont de même sexe.

EXERCICE 8. Trois CD notés a, b et c ont respectivement des boîtes nommées A, B et C. On range les 3 CD au hasard dans les boîtes sans voir leur étiquette.

1. Combien de rangements sont possibles ?
2. Quelle est la probabilité
   (a) que les 3 CD soient bien rangés ?
   (b) qu'exactement 1 CD soit bien rangé ?
   (c) qu'exactement 2 CD soient bien rangés ?
3. En déduire la probabilité qu'aucun CD ne soit bien rangé.

EXERCICE 9. Une urne contient 4 jetons : deux jaunes, un rose et un violet. On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
3. On considère les événements :
   — R : « Le 1er jeton tiré est rose » ;
   — J : « Le 2e jeton tiré est jaune ».
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(R)$ et $\mathbb{P}(J)$.
   (b) Traduire par une phrase $R \cap J$.
   Calculer $\mathbb{P}(R \cap J)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(R \cup J)$.
4. On considère l'événement :
   — N :« Aucun jeton tiré n'est jaune ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}(N)$.
   (b) Exprimer $\overline{N}$ par une phrase.
   (c) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{N}\right)$.

EXERCICE 10. Dans une classe de seconde, on a représenté dans le tableau suivant les langues vivantes étudiées en première langue par les 35 élèves. (On suppose que chaque élève étudie une seule première langue.)

	Anglais	Allemand	Espagnol
Garçons	8	3	4
Filles	10	4	6

On interroge au hasard un élève de cette classe. On s'intéresse aux événements suivants :

- F : « l'élève interrogé est une fille ».
- E : « l'élève interrogé étudie l'espagnol comme première langue ».

Calculez la probabilité de chacun des événements suivants : $E \cap F$, $E \cup F$, $\overline{E} \cap \overline{F}$ et $E \cup \overline{F}$.

EXERCICE 11. Un car scolaire se dirige vers Saint Jacques de Compostelle en passant par Conques avec à son bord 75 élèves dont 40 garçons. Miguel, le chauffeur, fait un sondage auprès des élèves pour savoir qui aime les chants grégoriens. Il découvre alors que 32 élèves ne les aiment pas, dont la moitié sont des filles, et que 20 % des garçons les aiment, et que 18 filles n'en ont jamais entendu parler.

1. Recopie et complète le tableau ci-dessous.

	Aime	N'aime pas	Ne connaît pas	Total
Garçons				
Filles				
Total				

2. On tire au hasard la fiche d'un élève.
   Quelle est la probabilité que :
   (a) ce soit un garçon ;
   (b) ce soit un garçon qui aime les chants grégoriens ;
   (c) ce soit un garçon ou un élève qui aime les chants grégoriens ;
3. On tire au hasard la fiche d'un garçon. Quelle est la probabilité qu'il aime les chants grégoriens ?

EXERCICE 12. Calculez la probabilité que deux élèves d'une classe de 35 élèves soient nés le même jour de l'année.

EXERCICE 13. On lance un dé bien équilibré à six faces dont trois sont bleues, deux sont blanches et une est rouge.

1. Les trois couleurs sont-elles équiprobables ?
2. Déterminer la probabilité d'apparition de chaque couleur.

EXERCICE 14. On lance deux dés à quatre faces et on regarde la somme obtenue.

1. Donner l'ensemble des résultats possibles.
2. Donner une loi de probabilités de cette expérience aléatoire (justifier).
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre multiple de trois ?

EXERCICE 15. Une enseignante propose à ses élèves un jeu de 52 cartes. Le jeu contient 13 cartes (As, 2,3, ..., 10, Valet, Dame, Roi) de chacune des familles suivantes : carreau, cœur, pique, trèfle. Cœur et carreau sont des familles de couleur rouge. Pique et trèfle sont de couleur noire.

1. L'enseignante donne une carte, choisie au hasard, à Ana.
   (a) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit rouge ?
   (b) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit un pique ?
   (c) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit un valet ?
   (d) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit une dame de couleur rouge ?
   (e) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit une carte de couleur rouge ou une dame ?
2. L'enseignante décide d'ajouter des cartes Joker à son jeu. Combien doit-elle ajouter de carte joker pour que la probabilité qu'Ana reçoive une carte Joker soit de $\frac{1}{14}$.

EXERCICE 16. Dans une classe de Grande Section, l'enseignant propose à ses élèves le jeu suivant dans lequel il s'agit d'être le premier à avoir exactement 15 jetons (source : *Découvrir les maths GS* - Éditions Hatier). Chaque élève lance deux dés bien équilibrés, identiques, à 6 faces numérotées de 1 à 6. Il considère les deux nombres indiqués sur les faces supérieures de chacun des dés. Lorsque les deux dés indiquent le même nombre, l'élève prend autant de jetons que l'indique l'un des deux dés. Sinon, il prend autant de jetons que le plus grand des deux nombres ou le double de jetons du plus petit. Après avoir lancé les dés, un élève a la possibilité de passer son tour. Dans ce cas, il ne prend aucun jeton.

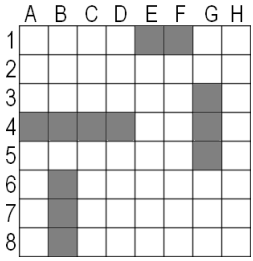
1. Un élève lance les deux dés ; il obtient un 3 et un 2. Combien de jetons peut-il prendre ? Donner tous les cas possibles.

2. Dresser la liste des tirages permettant d'obtenir 3 jetons.
3. Un élève lance les deux dés.
   (a) Montrer que la probabilité de l'événement « les nombres obtenus sont un 3 et un 2 » est $\frac{1}{18}$.
   (b) Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un des nombres obtenus est 3 » ?
   (c) Quelle est la probabilité de l'événement « les nombres obtenus permettent de prendre 4 jetons » ?
4. Après un nouveau lancer des deux dés, un élève a pris 3 jetons. Au lancer suivant, la probabilité qu'il prenne de nouveau 3 jetons augmente-t-elle, reste-t-elle identique ou diminue-t-elle par rapport à la probabilité d'avoir pris 3 jetons au tirage précédent ? Justifier.
5. En fin de partie, un élève possède 12 jetons. Lors de son lancer de dés, il obtient un 1 et un 4. Pourquoi est-il préférable pour lui de passer son tour ?

EXERCICE 17. Deux élèves de CM2, Jeanne et Teddy, jouent à la bataille navale. Il s'agit d'un jeu de société, appelé également « touché-coulé ». Les deux joueurs doivent commencer par placer quatre navires horizontalement ou verticalement (sans chevauchement) sur leur grille de 8 lignes et 8 colonnes, tenue secrète : 1 navire de deux cases, 2 navires de trois cases et 1 navire de quatre cases. Ils doivent ensuite tenter de faire « couler » les navires adverses en « touchant » toutes les cases de chaque navire de l'autre joueur. Pour cela, chacun, à son tour, énonce une case de la grille, sous le format « lettre-nombre », par exemple C2. Lorsqu'un joueur énonce une case, son adversaire répond :

— « À l'eau ! », si la case énoncée est vide ;
— « Touché ! », si la case énoncée est occupée par un morceau de navire et si les autres parties du navire n'ont pas encore toutes été touchées ;
— « Touché-coulé ! », si la case énoncée est occupée par un morceau de navire et si toutes les autres parties du navire ont déjà été touchées.

Le gagnant est le joueur qui fait « couler » chez son adversaire tous les navires (au sens de toucher toutes les cases de chacun d'eux) avant que les siens ne le soient.
Voici ci-contre la grille de Teddy : les quatre bateaux sont schématisés par des rectangles gris.
On suppose qu'à chaque tir, Jeanne choisit au hasard et de manière équiprobable une case de la grille qu'elle n'a pas énoncée précédemment.



1. Au premier essai :
   (a) Quelle est la probabilité que Jeanne touche un bateau ?
   (b) Quelle est la probabilité que Jeanne ne touche aucun bateau ?
   (c) Un des bateaux a une chance sur seize d'être touché. De combien de cases est-il composé ?
   (d) Jeanne choisit une case de la colonne B. Quelle est la probabilité qu'elle touche un bateau ?
2. Au premier essai de la partie, Jeanne désigne la case « E1 ». Teddy annonce « Touché ! ». Jeanne souhaite couler le bateau touché et choisit une case adjacente à la case « E1 ». Quelle est la probabilité qu'elle coule le bateau au coup suivant ? Justifier.
3. Teddy annonce « À l'eau ! » pour les deux premiers essais de Jeanne. Quelle est la probabilité de toucher un bateau pour son troisième essai ?

EXERCICE 18. Dans une école élémentaire de 150 élèves, 80 sont des filles. Le directeur veut mettre en place un « orchestre à l'école ». Il réalise une enquête auprès des familles de l'école afin de connaître les élèves qui pratiquent déjà un instrument de musique. À l'issue de l'enquête, il apparaît que 24 % des élèves sont musiciens. Parmi ces élèves, 16 sont des garçons.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

	Nombres d'élèves musiciens	Nombre d'élèves non-musiciens	Total
Nombre de filles			
Nombre de garçons			
Total			150

2. Dans cette question, on écrira les résultats sous forme de fractions irréductibles.
   On interroge un élève au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ?
   (b) Quelle est la probabilité que ce soit une fille musicienne ?
   (c) Quelle est la probabilité que ce soit un élève non-musicien ?
3. L'élève interrogé est un garçon. Quelle est la probabilité qu'il soit musicien ?
4. 30 % des filles musiciennes jouent d'un instrument à vent. Quel pourcentage cela représente-t-il par rapport à l'effectif total de l'école ?

EXERCICE 19. Un pot opaque contient 5 boules, indiscernables au toucher, portant des numéros de 1 à 5. On tire successivement 2 boules du pot pour former des nombres en procédant comme suit :

— on tire une première boule qui indiquera le chiffre des dizaines du nombre,
— on tire une seconde boule du pot (sans avoir remis la première boule tirée) qui indiquera le chiffre des unités.

Par exemple, si on tire le 2 puis le 5 alors on dit qu'on a obtenu le nombre 25. On ne peut pas obtenir le nombre 55.

On note M l'événement « obtenir un nombre strictement supérieur à 46 » et N l'événement « obtenir un nombre pair ».

1. Représentez l'expérience par un arbre probabiliste.
2. Calculez $\mathbb{P}(M)$.
3. Calculez $\mathbb{P}(N)$.
4. Décrivez l'événement $M \cap N$ par une phrase puis calculez sa probabilité.
5. Après avoir décrit l'événement $M \cup N$ par une phrase déduisez des questions précédentes la probabilité de $M \cup N$.