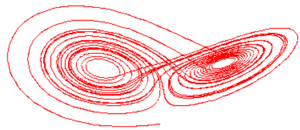
Modéliser les probabilités avec des ensembles.

Expérience aléatoire.

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat (ou *issue*) ne peut être connu à l'avance.

Parfois les systèmes dynamiques déterministes très sensibles aux conditions initiales ne sont pas prévisibles par des moyens déterministes. Il faut alors utiliser des modélisations probabilistes. On parle de système chaotique et de *théorie du chaos*.



Attracteur de Lorentz.

À l'origine de cette théorie nous retrouvons Henri Poincaré qui découvrit cette problématique en essayant de modéliser les attractions gravitationnelles entre 3 corps ou plus. Sont associés à cette théorie de nombreux mathématiciens, notamment ceux qui ont travaillé sur des équations différentielles (équations dont l'inconnue est une fonction) comme Cauchy ou Lipschitz.

La météorologie est un exemple d'étude de système chaotique et le météorologue Lorentz intitula une de ses conférences d'une expression qui fit florès « Prédictibilité : le battement d'aile d'un papillon au Brésil provoque-t-il une tornade au Texas ? ».

Comme pour toute expérience il faut définir un *dispositif expérimental*. Il s'agit de décrire l'expérience et les conditions dans lesquelles elle est réalisée ainsi que ce qu'il faut observer (issues). Il faut d'ailleurs connaître toutes les issues.

Probabilité d'une issue.

Si on recommence un grand nombre (en théorie une infinité) de fois une expérience aléatoire la fréquence d'apparition d'une issue, ω, s'approche d'une valeur fixe qui est appelée *la probabilité de l'issue* et notée $\mathbb{P}(\omega)$.

C'est ce pseudo principe qui fait le lien entre la réalité matérielle d'une expérience aléatoire et les outils mathématiques pour le modéliser.

Nous aurons tendance à oublier ce fait : la connaissance des probabilités dans la réalité relèvent d'une étude statistique sur un grand nombre de répétitions d'une expérience.

Remarques.

1. Puisque la probabilité est une fréquence c'est un nombre réel compris entre 0 et 1 : $\mathbb{P}(\omega) \in [0;1]$.
2. Pour étudier une expérience aléatoire il faut faire le choix (pour nous le plus souvent arbitraire) d'une *modélisation*. C'est-à-dire choisir un univers (ou un ensemble d'événements) et une loi de probabilité qui correspondent à l'expérience.

Loi de probabilité.

Définition 1. La donnée des probabilités de toutes les issues forment la *loi de probabilité* ou *distribution de probabilité*.

Remarques.

1. Nous utiliserons différentes façon de représenter cette loi : tableau de valeurs, expressions algébriques ou représentation graphique. À chaque issue on associe une probabilité on définie donc une fonction.

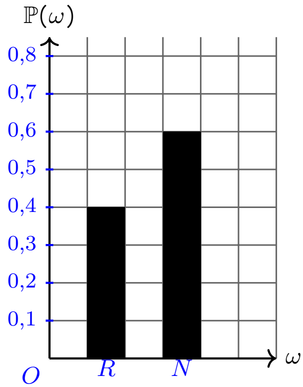
Exemples.

1. Si une urne de Bernoulli (opaque) contient 2 boules rouges et 3 boules noires, indiscernables au toucher, et que l'on tire une boule de l'urne en notant sa couleur, alors on peut donner la loi de probabilité en donnant

ω	R	N
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

.

Plus rarement (à votre niveau) on représente la distribution de probabilité dans un repère :



2. Si une urne de Bernoulli contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules de couleurs toutes différentes alors, dans ce cas, la loi de probabilité porte un nom propre. Elle est dite *uniforme* ou d'*équiprobabilité*. On peut aussi décrire cette loi de probabilité par son expression algébrique : $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{n}$ quelle que soit la boule ω.

Événements.

Définition 2. L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé *l'univers* (ou *événement certain*) et est noté Ω.

Proposition 1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Démonstration. La fréquence d'apparition de toutes les issues est de 1 (puisque toutes les issues sont recensées).

Exemples.

1. Pour un lancer de dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, les issues sont les entiers de 1 à 6. On note alors : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Définition 3. *Un événement* est un sous-ensemble de l'univers.

Remarques.

1. Un événement A peut être présenté par :
   — une propriété A :« Les issues telles que ... »,
   — un sous-ensemble : $A = \{\dots\}$.
2. Un évènement est un regroupement d'issues qui nous intéresse. Le canonnier ne s'intéresse pas uniquement au boulet qui tombe sur tel point mais dans une zone alentour. Aucune issue ne convient à ces événements.
3. On ne dira pas $\omega \in A$ mais *l'issue ω réalise A*.

Exemples.

1. Pour un lancer de dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, $\{1 ; 4\}$ est un événement puisque c'est un sous-ensemble de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

2. Pour un lancer de dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, l'événement A :« Les issues sont des nombres pairs » peut aussi s'écrire : $A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$.
3. Pour un lancer de dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, l'événement $B = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$ peut être décrit par B :« Les issues sont des nombres strictement supérieurs à 2 ».

Définition 4. L'ensemble $\varnothing$ est appelé l'*événement impossible*.

Exemples.

1. L'événement C : « obtenir sept pour un lancer de dé à six faces » est un événement impossible. $C = \varnothing$.

Remarques.

1. Les événements impossibles sont ceux qui prévoient d'autres possibilités que celles de l'univers.

Probabilité d'un événement.

Définition 5. *La probabilité d'un événement* est la somme des probabilités des issues qu'il contient.

EXERCICE 1. On lance un dé pipé. Le tableau suivant regroupe les probabilités.

F (face)	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(F)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	?

1. Calculer $\mathbb{P}(6)$.
2. Calculer la probabilité des événements suivants.
   (a) « La face obtenue est paire » ;
   (b) « la face obtenue est supérieure ou égale à 5 ».

Réunion et intersection d'événements.

L'événement $A \cup B$ (obtenu par la réunion des sous-ensembles A et B) contient les issues contenues dans A *ou* dans B.

Exemples.

1. En reprenant les exemples précédents du dé. $A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$ et $B = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$ donc les issues contenues dans A ou dans B forment le sous-ensemble : $A \cup B = \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.

L'événement $A \cap B$ (obtenu par l'intersection des sous-ensembles A et B) contient les issues contenues dans A *et* dans B (simultanément).

Exemples.

1. En reprenant les exemples précédents du dé. $A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$ et $B = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$ donc les issues contenues dans A et dans B forment le sous-ensemble : $A \cap B = \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.

Proposition 2. Soient A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Remarques.

1. Cette formule est valable quelle que soit la loi de probabilité qui est utilisée.
2. Cette formule (surtout pour sa généralisation à plus de deux événements) est appelée *formule du crible de Poincaré*.

Événement contraire.

Étant donné un événement E, *l'événement contraire* de E, noté $\overline{E}$, est formé de toutes les issues qui ne sont pas dans E. Autrement dit l'événement contraire de E est le complémentaire de E dans Ω.

Exemples.

1. En reprenant les exemples précédents du dé. Puisque $B = \{3~;~4~;~5~;~6\}$ et $\Omega = \{1~;~2~;~3~;~4~;~5~;~6\}$ il en découle que $\overline{B} = \{1~;~2\}$.

Proposition 3. Soit A un événement d'un univers Ω. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

EXERCICE 2. Démontrez que $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

Des événements A et B sont dits *incompatibles* si et seulement si $A \cap B = \varnothing$. Remarquons que si A et B sont incompatibles alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Les événements sont incompatibles si et seulement si A et B sont des ensembles disjoints.

Exemples.

1. « Obtenir un nombre pair » et « Obtenir un nombre impair » sont des événements incompatibles.

EXERCICE 3. Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone. On considère les événements :

- O_1 : « La 1^er ligne est occupée ».
- O_2 : « La 2^e ligne est occupée ».

Une étude statistique montre que :

- $p(O_1) = 0{,}4$
- $p(O_2) = 0{,}3$
- $p(O_1 \cap O_2) = 0{,}2$

Calculer la probabilité des événements suivants.

1. « La ligne 1 est libre ».
2. « Au moins une des lignes est occupée ».
3. « Au moins une des lignes est libre ».

Exercices.

EXERCICE 4. On dispose d'un dodécaèdre régulier à 12 faces dont les faces sont numérotées de 1 à 12. Lorsqu'on le lance il retombe sur une des faces dont on note le numéro. On note A l'événement « obtenir un numéro pair » et B l'événement « obtenir un multiple de 3 ». pour chacun des événements suivants listez les issues qui les constituent.

a) A. b) B. c) $\overline{B}$. d) $A \cap B$. e) $A \cup B$.
f) $\overline{A} \cup B$.

EXERCICE 5. Une entreprise fabrique des pièces de carrosserie automobile. Ces pièces peuvent présenter deux sortes de défauts : défaut d'usinage ou défaut de peinture. On note A l'événement « la pièce a un défaut d'usinage » et B l'événement « la pièce à un défaut de peinture ». À la sortie de la fabrication, on choisit une pièce au hasard.

1. Pour chacun des événements suivant dites s'il correspond à $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ ou $\overline{A} \cap \overline{B}$.
   - E : « la pièce a deux défauts ».
   - F : « la pièce a au moins un des deux défauts ».
   - G : « la pièce n'a aucun défaut ».

- H : « la pièce a au plus un défaut ».

2. Parmi les événements E, G et H, lequel est l'événement contraire de F ?
3. Parmi les événements F, G et H lequel est l'événement contraire de E ?