Modélisation et équiprobabilité.

I Expérience aléatoire.

II Généralités sur la modélisation.

1 Loi de probabilité.

2 Événement.

Exercice 1. ☯

On lance un dé pipé.
Le tableau suivant regroupe les probabilités.

F (face)	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(F)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	?

1. Calculer $\mathbb{P}(6)$.
2. Calculer la probabilité des événements suivants.
   (a) « La face obtenue est paire » ;
   (b) « la face obtenue est supérieur ou égale à 5 ».

Correction de l'exercice 1

1. Calculons $\mathbb{P}(6)$.

   La probabilité de l'univers est 1.

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

   équivaut successivement à :

$$\mathbb{P}(\{1;2;3;4;5;6\}) = 1$$

   la probabilité d'un événement égalant la somme des probabilités des issues qui le réalise :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) &= 1 \\ 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}3 + \mathbb{P}(\{6\}) &= 1 \end{aligned}$$

   Il s'agit d'une équation linéaire :

$$\mathbb{P}(\{6\}) = 1 - 0{,}9$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{6\}) = 0{,}1.}$$

2. (a) Notons A : « la face obtenue est paire ».

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{2;4;6\}) \\ &= \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 0{,}4.}$$

3. B : « la face obtenue est supérieure ou égale à 5 ».

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\{5;6\}) \\ &= \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= 0{,}3 + 0{,}1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = 0{,}4.}$$

3 Réunion et intersection d'événements.

4 Événement contraire.

Exercice 2. ⚽

Démontrez que $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

Correction de l'exercice 2

Nous savons $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ donc, d'après la précédente proposition :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\varnothing) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{\varnothing}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\Omega) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice 3. ☯

Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone. On considère les événements :

- O_1 : « La 1er ligne est occupée ».
- O_2 : « La 2^{e} ligne est occupée ».

Une étude statistique montre que :

- $p(O_1) = 0{,}4$
- $p(O_2) = 0{,}3$
- $p(O_1 \cap O_2) = 0{,}2$

Calculer la probabilité des événements suivants.

1. « La ligne 1 est libre ».
2. « Au moins une des lignes est occupée ».
3. « Au moins une des lignes est libre ».

Correction de l'exercice 3

1. Il s'agit ici d'interpréter les événements proposés avec ceux donnés dans l'énoncé.

   Calculons $\mathbb{P}(\overline{O_1})$.

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{O_1}) &= 1 - \mathbb{P}(O_1)\\ &= 1 - 0{,}4\end{aligned}$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(\overline{O_1}) = 0{,}6.}$$

2. L'expression « Au moins l'une » peut s'exprimer en utilsant la conjonction « ou » et par conséquent par l'union.

   Calculons $\mathbb{P}(O_1 \cup O_2)$.

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(O_1 \cup O_2) &= \mathbb{P}(O_1) + \mathbb{P}(O_2) - \mathbb{P}(O_1 \cap O_2)\\ &= 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}2\end{aligned}$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(O_1 \cup O_2) = 0{,}5.}$$

3. Cette question est nettement moins facile. En réfléchissant comme à la question précédente :

Calculons $\mathbb{P}(\overline{O_1} \cup \overline{O_2})$.

$$\mathbb{P}(\overline{O_1} \cup \overline{O_2}) = \mathbb{P}(\overline{O_1}) + \mathbb{P}(\overline{O_2}) - \mathbb{P}(\overline{O_1} \cap \overline{O_2})$$

$\overline{O_1} \cap \overline{O_2}$ signifie « la première ligne est libre et la seconde aussi ». Nous n'avons pas la possibilité de calculer directement la porbabilité de cet événement. L'événement contraire peut s'exprimer par : « la première ligne est occupée ou la seconde est occupée », autrement dit « au moins une des deux lignes est occupée ». Donc :

$$\begin{aligned}
&= 1 - \mathbb{P}(O_1) + 1 - \mathbb{P}(O_2) - \mathbb{P}(\overline{O_1 \cup O_2}) \\
&= 1 - 0{,}4 + 1 - 0{,}3 - [1 - \mathbb{P}(O_1 \cup O_2)] \\
&= 1{,}3 - [1 - 0{,}5]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{O_1} \cup \overline{O_2}) = 0{,}8.}$$

La dernière question de l'exercice introduit et correspond aux lois de De Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

III Exercices avec équiprobabilité.

Exercice 4. ☯

Un jeu consiste à lancer un dé parfaitement équilibré dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Quel est l'univers de l'expérience ?
2. Calculez la probabilité d'obtenir 3.
3. Calculez la probabilité de l'événement $B = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.
4. Calculez la probabilité de l'événement A :« Les issues sont des nombres pairs ».
5. Décrivez par un ensemble l'événement $A \cap B$ et déduisez en sa probabilité.
6. Déduisez des trois questions précédentes la probabilité de $A \cup B$.
7. Calculez la probabilité de $\overline{A}$.

Correction de l'exercice 4

1. Rechercher ce que sont les issues. Qu'observe-t-on à l'issue de l'expérience ? Qu'est-ce qui correspond à une situation d'équiprobabilité ? Puis recensement de toutes les issues.

Une issue est un entier entre 1 et 6 donc :

$$\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}.$$

2. Recherche dans le dispositif expérimental des indicateurs concernant une éventuelle équiprobabilité : « parfaitement équilibré ».

   L'expérience est régie par loi d'équiprobabilité puisque le dé est parfaitement équilibré et l'univers contient 6 issues donc la probabilité d'une issue est :

   $$\mathbb{P}(\{3\}) = \tfrac{1}{6}.$$

3. Déterminons $\mathbb{P}(B)$.

   La rédaction qui suit n'est pas celle que nous utiliserons habituellement.

   Par définition de la probabilité d'un événement et puisque $B = \{4;\ 4;\ 5;\ 6\}$:

   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\})$$

   Il y a équiprobabilité et l'univers comporte 6 issues donc

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\\ &= 4 \times \frac{1}{6}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

   $$\text{Ainsi } \mathbb{P}(B) = \tfrac{2}{3}.$$

   Nous retiendrons le résultat suivant que nous utiliserons souvent dans les exercices

4. Calculons $P(A)$.

   L'événement nous est présenté par une propriété il faut le traduire par un sous-ensemble de l'univers. ♡

   $A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$.
   - Il y a équiprobabilité.
   - L'univers comporte 6 issues.
   - A est réalisé par 3 issues.

   Donc :

   $$P(A) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}$$

5. Calculons $P(A \cap B)$.

— Il y a équiprobabilité.
— L'univers comporte 6 issues.
— $A \cap B$ est formé des issues qui réalisent à la fois A et B. Il faut donc trouver les éléments communs aux deux ensembles.
  $A \cap B = \{4\ ;\ 6\}$ donc $A \cap B$ est réalisé par 2 issues.

donc :

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

6. Calculons $P(A \cup B)$.

   $A \cup B$ est formé des issues qui réalisent A ou B (au moins l'un des deux). Il faut donc trouver les éléments des deux ensembles.
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}.$$

7. Calculons $P(\overline{A})$.

   $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$$

Exercice 5. ☯

Un jeu consiste a lancer deux dés cubiques parfaitement équilibrés numérotés de 1 à 6.

1. Donnez sous forme d'un tableau l'univers associé à cette expérience.
2. Calculez la probabilité d'obtenir 6 sur les deux dés.
3. On note A : « La somme des nombres obtenus égale 3 ». Calculez la probabilité de l'événement A.
4. On note B : « le produit des nombres obtenus égale 6 ». Calculez la probabilité de l'événement B.
5. On note C : « le produit des nombres obtenus égale 7 ». Calculez la probabilité de l'événement C.
6. On note D : « la somme des nombres obtenus est strictement supérieure à 3 ». Calculez la probabilité de l'événement D.

Correction de l'exercice 5

1. Lorsque les résultats d'une expérience aléatoire comme ici sont formés de deux données (un nombre pour chaque dé) il est souvent intéressant de représenter l'expérience par un tableau double-entrée comme ci-dessous.
   Cependant les arbres probabilistes peuvent aussi être utilisés et permettent de représenter davantage de situations que le tableau double-entrée.

	1	2	3	4	5	6
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$	$(2;5)$	$(2;6)$
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;4)$	$(3;5)$	$(3;6)$
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$	$(4;4)$	$(4;5)$	$(4;6)$
5	$(5;1)$	$(5;2)$	$(5;3)$	$(5;4)$	$(5;5)$	$(5;6)$
6	$(6;1)$	$(6;2)$	$(6;3)$	$(6;4)$	$(6;5)$	$(6;6)$

Ainsi l'univers est formé de 36 couples correspondant aux résultats obtenus sur les deux dés.

2. L'événement dont il est questio n'ayant pas de nom nous allon lui en donné un. Notons E : « obtenir 6 sur les deux dés ».

   Calculons $\mathbb{P}(E)$.

   $E = \{(6;6)\}$.
   Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et E est réalisé par une issue donc

   $$\boxed{P(E) = \frac{1}{36}.}$$

3. Déterminons les sommes associées à chaque issue sous forme d'un tableau.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   $A = \{(1;2),(2;1)\}$.
   Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et A est réalisé par 2 issues donc $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{36}$.

   $$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{18}.}$$

   Pour cette question nous arions pu choisir une modélisation alternative.
   En choisissant comme issue la somme des nombres sur les deux faces nous obtenons comme univers : $\Omega = \{2;3;4;\dots;11;12\}$. Et la loi de probabilité correspondante est alors :

Issues	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Proba	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Remarquons tout de même que pour faire cette modélisation nous avons en fait utilisé de façon implicite l'équiprobabilité de la précédente modélisation.

4. Déterminons les sommes associées à chaque issue sous forme d'un tableau.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$B = \{(1;6),(2;3),(3;2),(6;1)\}$.
Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et B est réalisé par 4 issues donc $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{36}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{1}{9}.}$$

5. Calculons $\mathbb{P}(C)$.

$C = \varnothing$.
Peu importe la loi de probabilité dans ce cas puisqu'il s'agit d'un événement impossible :

$$\boxed{\mathbb{P}(C) = 0.}$$

6. Calculons $\mathbb{P}(D)$.

L'événement D rassemblant de nombreuses issues nous préférerons (mais ce n'est pas une obligation) considérer un événement contraire.

$\overline{D}$: « la somme est inférieure (ou égale) à 3 » donc : $\overline{D} = \{((1;1)\}$.
Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et $\overline{D}$ est réalisé par 1 issues donc $\mathbb{P}\left(\overline{D}\right) = \frac{1}{36}$.
Donc : $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{D}\right) = 1 - \frac{1}{36}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(D) = \frac{35}{36}.}$$

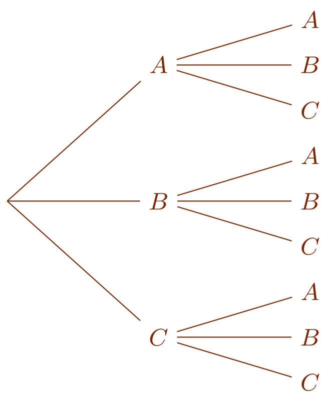
Exercice 6.

Un square est équipé de trois bancs. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard. L'objet de l'exercice est de déterminer la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte.
Les trois bancs sont notés A, B et C.

1. Représentez la situation par un arbre.
2. Calculez la probabilité que les deux personnes s'assoient sur le banc A.
3. Calculez la probabilité que les deux personnes s'assoient côte à côte.

Correction de l'exercice 6

1.



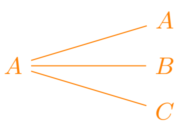
Ainsi $\Omega = \{AA; AB; AC; BA; BB; BC; CA; CB; CC\}$.

Un peu de vocabulaire sur les arbres.

— Les lettres sont appelés des *nœuds* : ici A, B et C sont des nœuds. Le premier nœud n'est pas désigné par une lettre et est appelé la racine de l'arbre.

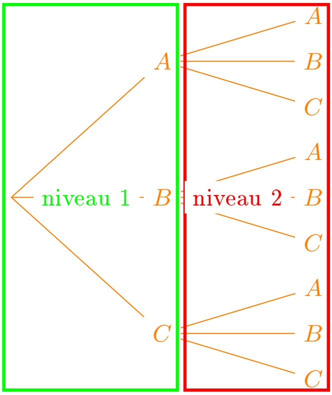
— Les segments qui relient deux nœuds sont appelés des *branches* : A —— B est une branche.

— Un embranchement est formé d'un nœud et des branches qui en partent :

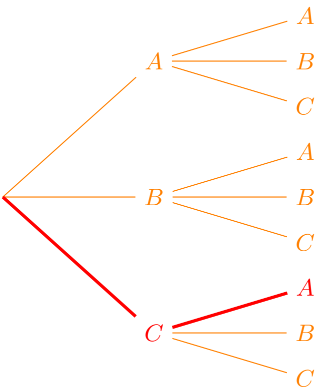


est un embranchement.

— Un *niveau* est formé de tous les embranchements qui sont également éloignés de la racine :



— Un *chemin* est formé d'une succession de nœuds et de branches qui partent de la racine pour aboutir à une feuille de l'arbre. En rouge ci-dessous est indiqué un chemin :



Dans un arbre probabiliste ce sont les chemins et non les nœuds qui représentent les issues. Dans cet arbre il y a 9 chemins qui correspondent à autant d'issues. Les issues sont souvent désignés par la succession (dans l'ordre) des nœuds : CA est le chemin passant d'abord par C puis par A.

2. Notons E_1 : « Les deux personnes s'assoient sur le banc A. »

   Calculons $\mathbb{P}(E_1)$.

   $E_1 = \{AA\}$
   Il y a équiprobabilité, E_1 est réalisé par 1 issue et l'univers comporte 9 issues, donc

   $$\boxed{P(E_1) = \frac{1}{9}.}$$

3. Notons E_2 : « Les deux personnes s'assoient sur le même banc. »

   Calculons $\mathbb{P}(E_2)$.

$E_2 = \{AA; BB; CC\}$
Il y a équiprobabilité, E_2 est réalisé par 3 issues et l'univers comporte 9 issues, donc

$$\boxed{P(E_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.}$$

Exercice 7. ⚽

On lance 3 fois une pièce bien équilibrée.

1. Représentez la situation par un arbre.
2. Quelle est la probabilité :
   (a) d'avoir 3 faces ?
   (b) que le deuxième jet soit face ?
   (c) que le troisième jet soit différent du premier ?

Exercice 8.

Un examinateur doit interroger, dans un certain ordre, quatre candidats : Arthur, Béatrice, Chloé et David. Il doit établir une liste ordonnée de quatre noms.

1. À l'aide d'un arbre, déterminez le nombre de listes possibles.
2. L'examinateur tire la liste des quatre noms au hasard, chaque liste possible, ayant la même probabilité.
   Déterminez la probabilité de chacun des événements suivants :
   - E :« Béatrice est interrogée en premier ».
   - F :« Chloé est interrogée en dernier ».
   - G :« David est interrogé avant Béatrice ».
3. Définir par une phrase l'événement $E \cap F$ et en donner la probabilité.
4. Définir par une phrase l'événement $E \cup F$ et en donner la probabilité.

Exercice 9.

Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix

- entre 2 entrées : Artichaut ou Betterave ;
- entre 3 plats : Cheval, Daube ou Escalope ;
- entre 2 desserts : Fromage ou Gâteau.

Un menu se compose :
— d'une entrée ;
— d'un plat ;
— d'un dessert.

1. En utilisant un arbre, représenter tous les menus.
2. Combien de menus différents sont possibles ?
3. On choisit un menu au hasard.
   Quelle est la probabilité :
   (a) qu'il comporte une escalope ?
   (b) qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?
   (c) qu'il ne comporte pas de cheval ?

Exercice 10.

Un groupe de 4 amis, Émile, Flore, Gaston et Hélène sont dans un bateau. Ils tirent au sort celui qui va ramer et, parmi les noms restants, celui qui va écoper.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Déterminer les probabilités suivantes.
   (a) C'est un garçon qui rame.
   (b) Hélène écope.
   (c) Les deux qui travaillent sont de même sexe.

Exercice 11.

Trois CD notés a, b et c ont respectivement des boîtes nommées A, B et C.
On range les 3 CD au hasard dans les boîtes sans voir leur étiquette.

1. Combien de rangements sont possibles ?
2. Quelle est la probabilité
   (a) que les 3 CD soient bien rangés ?
   (b) qu'exactement 1 CD soit bien rangé ?
   (c) qu'exactement 2 CD soient bien rangés ?
3. En déduire la probabilité qu'aucun CD ne soit bien rangé.

Exercice 12.

Une urne contient 4 jetons : deux jaunes, un rose et un violet.
On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
3. On considère les événements :
   — R : « Le 1$^{\text{er}}$ jeton tiré est rose » ;
   — J : « Le 2$^{\text{e}}$ jeton tiré est jaune ».
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(R)$ et $\mathbb{P}(J)$.
   (b) Traduire par une phrase $R \cap J$.
   Calculer $\mathbb{P}(R \cap J)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(R \cup J)$.
4. On considère l'événement :
   — N :« Aucun jeton tiré n'est jaune ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}(N)$.
   (b) Exprimer $\overline{N}$ par une phrase.
   (c) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{N}\right)$.

Exercice 13.

Dans une classe de seconde, on a représenté dans le tableau suivant les langues vivantes étudiées en première langue par les 35 élèves. (On suppose que chaque élève étudie une seule première langue.)

	Anglais	Allemand	Espagnol
Garçons	8	3	4
Filles	10	4	6

On interroge au hasard un élève de cette classe. On s'intéresse aux événements suivants :

- F : « l'élève interrogé est une fille ».
- E : « l'élève interrogé étudie l'espagnol comme première langue ».

Calculez la probabilité de chacun des événements suivants : $E \cap F$, $E \cup F$, $\overline{E} \cap \overline{F}$ et $E \cup \overline{F}$.

Exercice 14.

Un car scolaire se dirige vers Saint Jacques de Compostelle en passant par Conques avec à son bord 75 élèves dont 40 garçons.
Miguel, le chauffeur, fait un sondage auprès des élèves pour savoir qui aime les chants grégoriens. Il découvre alors que 32 élèves ne les aiment pas, dont la moitié sont des filles, et que 20 % des garçons les aiment, et que 18 filles n'en ont jamais entendu parler.

1. Recopie et complète le tableau ci-dessous.

	Aime	N'aime pas	Ne connaît pas	Total
Garçons				
Filles				
Total				

2. On tire au hasard la fiche d'un élève.
Quelle est la probabilité que :
   (a) ce soit un garçon ;
   (b) ce soit un garçon qui aime les chants grégoriens ;
   (c) ce soit un garçon ou un élève qui aime les chants grégoriens ;
3. On tire au hasard la fiche d'un garçon.
Quelle est la probabilité qu'il aime les chants grégoriens ?

Exercice 15.

Calculez la probabilité que deux élèves d'une classe de 35 élèves soient nés le même jour de l'année.

Exercice 16.

On lance un dé bien équilibré à six faces dont trois sont bleues, deux sont blanches et une est rouge.

1. Les trois couleurs sont-elles équiprobables ?
2. Déterminer la probabilité d'apparition de chaque couleur.

Exercice 17.

On lance deux dés à quatre faces et on regarde la somme obtenue.

1. Donner l'ensemble des résultats possibles.
2. Donner une loi de probabilités de cette expérience aléatoire (justifier).
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre multiple de trois ?

Exercice 18.