Vecteurs colinéaires.

Nous avions vu que nous pouvions additionner des vecteurs et les multiplier par des nombres.

Nous allons nous intéresser à la relation qui existe entre un vecteur et le vecteur obtenu en multipliant ce dernier par un nombre quelconque. Cette relation est appelée la colinéarité.

Lorsque les vecteurs sont des vecteurs du plan nous obtenons une équivalence entre colinéarité et parallélisme. Autrement dit les problèmes de parallélisme vont maintenant pouvoir être traités grâce aux vecteurs. Peu à peu nous voyons que les vecteurs peuvent remplacer les outils de géométrie que nous avions l'habitude d'utiliser en géométrie euclidienne classique (théorème de Thalès, angles alternes-internes, etc).

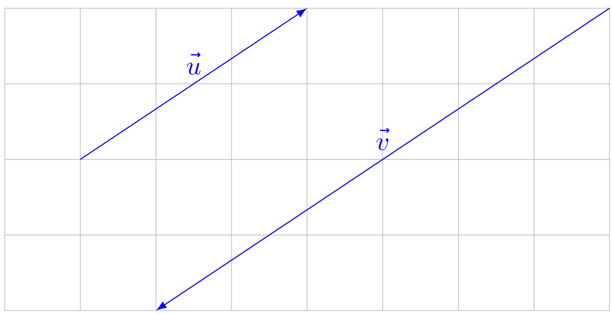
I Définition.

Définition 1

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* si et seulement si il existe un nombre réel λ (*i.e.* on peut en trouver au moins un) tel que

$$\vec{u} = \lambda\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda\vec{u}$$

Exemples.

1. Si $\vec{u} = 2\vec{v}$ alors $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.
2. 

   Nos remarquons que $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$ donc $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
3. Si $6\vec{u} - 4\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car : $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{v}$.
4. Si deux vecteurs sont égaux alors ils sont colinéaires car $\vec{u} = 1\vec{v}$.

5. $\vec{0}$ est colinéaire à $\vec{u}$ car $\vec{0} = 0\vec{u}$.

Remarques.

1. Nous pouvons voir la chose comme une sorte de rapport de proportionnalité entre les vecteurs.
2. Il suffit d'établir l'une des deux égalités pour établir la colinéarité de deux vecteurs.
3. Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

II Caractérisation.

Proposition 1

Soient :
. $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan,
. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs dont les coordonnées relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$, sont respectivement $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils vérifient l'une au moins des propriétés suivantes.

(i) Il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

(ii) Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles.

(iii) $x_u y_v - x_v y_u = 0$.

Démonstration

Par définition de la colinéarité $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Autrement dit si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ y_2 = \lambda y_1 \end{cases}$$

Autrement dit si et seulement si les coordonnées de $\vec{u}$ sont proportionnelles à celles de $\vec{v}$.

Ce qui équivaut à dire que le produit en croix est vérifié.

Autrement dit $x_u \times y_v - x_v \times y_u = 0$.

x_u	x_v
y_u	y_v

■

Remarques.

1. Le nombre $x_u y_v - x_v y_u$ est appelé le *déterminant* de la famille de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$ par rapport à la base $(\vec{i},\vec{j})$ et est noté

$$\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}.$$

   Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté nous écrirons simplement $\det(\vec{u},\vec{v})$.
   D'un point de vu pratique nous retiendrons que deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

2. Nous privilégierons, si possible, la recherche du coefficient de proportionnalité entre les coefficients qui nous fournira l'égalité liant les deux vecteurs plutôt que le calcul du déterminant.

Exercice 1. ☯

Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\8\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\3\end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1

a) Clairement en considérant les coordonnées des vecteurs nous remarquons une proportionnalité : $\vec{v} = -2\vec{u}$. Et donc ♡

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

b) Montrons que $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. ♡

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u};\vec{v}) &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix} \\
&= \left(\sqrt{2}-1\right) \times \left(\sqrt{2}+1\right) - 1 \times 1 \\
&= \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 1 + (-1) \times \sqrt{2} + (-1) \times 1 - 1 \\
&= \sqrt{2}^2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 2 \\
&= 2 - 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

c) Déterminons si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u};\vec{v}) &= \begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}\\ &= 3\times 2 - 4\times(-1)\\ &= 11\\ &\neq 0\end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

d) Déterminons l'ensemble des x tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u},\vec{v}) = 0 &\iff \begin{vmatrix}1 & x\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 0\\ &\iff 1\times 3 - 2\times x = 0\\ &\iff -2x+3 = 0\\ &\iff -2x+3-3 = 0-3\\ &\iff -2x = -3\\ &\iff \frac{-2x}{-2} = \frac{-3}{-2}\\ &\iff x = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$\vec{u}$ et$\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x = \frac{3}{2}$.

Exercice 2. ⚽

Donnez deux vecteurs colinéaires à $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2

$\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}12\\-12\end{pmatrix}$.

Exercice 3.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}$.

Calculez le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Correction de l'exercice 3

$\det(\vec{u};\vec{v}) = -101 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 4.

Déterminez si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\21\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\21\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{7}{4}\\\frac{2}{7}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\4\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix}$.

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}21\\28\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4

a) $\vec{u} = 1 \cdot \vec{v}$ donc colinéaires.

b) $\det(\vec{u},\vec{v}) = -135$ donc non colinéaires.

c) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \frac{48}{8}$ donc non colinéaires.

d) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ donc colinéaires.

e) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ donc colinéaires.

f) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ donc colinéaires.

Exercice 5.

Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et si c'est le cas précisez l'égalité les reliant.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-9\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix}$.

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\-\frac{5}{6}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\-15\end{pmatrix}$.

g) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\\sqrt{5}+1\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 5

a) $-2\vec{u} = \vec{v}$.

b) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.

c) $-3\vec{u} = \vec{v}$.

d) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.

e) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.

f) Non colinéaires.

g) $\frac{-4}{\sqrt{5}-1}\vec{u} = \vec{v}$.

Exercice 6. ⚽

Déterminez un réel μ de sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\mu\\2\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\\mu\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Exercice 7. ☯

Soients $A(-10;7)$, $B(-20;10)$, $C(5;-2)$ et $D(10;-8)$ des points du plan.
$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont-ils colinéaires ?

Correction de l'exercice 7

Démontrons que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont $\begin{pmatrix}x_C - x_A\\y_C - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-(-10)\\-2-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-9\end{pmatrix}$.

De même $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}-30\\18\end{pmatrix}$.

Clairement $\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

Exercice 8. ⚽

Soients les points $C(0;4)$, $D(2;7)$, $E(8;17)$ et $F(16;29)$.

1. Montrez que $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
2. $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 9. ☢

Soients $E(1;1)$, $F(6;4)$ et G d'abscisse 8 des points. Sachant que $\overrightarrow{FG}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 9

$\lambda\overrightarrow{FG} = \vec{u}$. Donc

$$\begin{cases}\lambda 2 = 5\\ \lambda(y_G - 4) = -3\end{cases}$$

D'où $\lambda = \frac{5}{2}$ puis $y_G = -3 \times \frac{2}{5} + 4 = \frac{14}{5}$.

III Parallélisme.

Proposition 2

Soient A, B, C et D des points du plan avec $A \neq B$ et $C \neq D$.

$(AB)//(CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Démonstration

La démonstration de cette proposition n'est pas possible sans une définition de ce qu'est une droite or nous n'en n'avons pour l'instant pas donné.

■

Remarques.

1. La négation de cette proposition est aussi intéressante : (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
2. Nous utiliserons ce résultat pour étudier la position relative de droites du plan (coplanaires), *i.e.* pour dire si elles sont parallèles (éventuellement confondues voir corollaire ci-après) ou sécantes.

Exercice 10. ☯

Soient $A(-4;-3)$, $B(8;1)$, $C(4{,}4)$ et $D(-2;2)$ des points du plan.
Étudiez la position relative de (AB) et (CD).

Correction de l'exercice 10

Étudier la position relative de deux droites du plan consiste à dire si elle sont parallèles ou sécantes (*i.e.* un unique pont d'intersection). Nous peaufinerons la réponse apportée à cette question dans la leçon sur les droites mais pour l'instant la réponse à cette question est soit « les droites sont parallèles » soit « les droites sont sécantes ».

Déterminons la position relative de (AB) et (CD).

$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8-(-4) \\ 1-(-3) \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$.

De même $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Clairement $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Autrement dit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
Ce qui équivaut encore à dire

(AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 11. ⚽
Déterminez la position relative des droites (AB) et (MN).

a) $A(1;2)$, $B(5;8)$, $M(0;-1)$ et $N(5;6)$.

b) $A(3;-10)$, $B(15;5)$, $M(1;1)$ et $N(17;21)$.

Correction de l'exercice 11

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$. $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}\right) \neq 0$. Donc : $(AB) \nparallel (MN)$.
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}12\\15\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}16\\20\end{pmatrix}$. $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}\right) = 0$. Donc : $(AB) \parallel (MN)$.

IV Alignement de trois points.

Dire que les points A, B et C sont alignés c'est dire qu'ils appartiennent à une même droite. C'est encore dire que les droites (AB) et (AC) sont confondues. C'est finalement dire que les droites (AB) et (AC) (qui ont évidemment le point A en commun) sont parallèles. Il est donc possible de traduire l'alignement des points avec la colinéarité.

Corollaire 1

Soient A, B et C des points du plan.

A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 12. ☯
Soient $A(-2;3)$, $B(2;1)$ et $C(4;0)$ dans un repère du plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Démontrez que A, B et C sont alignés.

Exercice 13. ⚽
Déterminez si les points A, B et C sont alignés.

a) $A(2;13)$, $B(-2;-7)$ et $C(11;58)$.

b) $A(9;20)$, $B(2;-1)$ et $C(25;71)$.

Il est possible de reformuler le précédent résultat : dire que trois points sont alignés, c'est dire que l'un d'entre eux appartient à la droite passant par les deux autres.

Corollaire 2

Soient A, B et M des points du plan.

M appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Remarques.

1. Ce résultat qui peut sembler anodin sera utiliser pour définir les droites du plan dans une prochaine leçon.

Exercice 14. ☯

Déterminez si le point M appartient à la droite (EF).

a) $E(5;-3)$, $F(-3;3)$ et $M(15;-9)$.

b) $E(0;-7)$, $F(1;0)$, $M(2;7)$.

Correction de l'exercice 14

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-20\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}13\\65\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}) &= \begin{vmatrix}\sqrt{2}-4 & 13\\ -20 & 65\end{vmatrix}\\ &= -4\times 65 - 13\times(-20)\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et donc :

A, B et C sont alignés.

V Exercices.

Exercice 15.

Déterminez tous les nombres x tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\10\end{pmatrix}$.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1+x\\2x\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 15

1. Le résultat est immédiat en remarquant que $y_v = 2xy_u$ donc nécessairement $x_v = 2x_u = 2\times 1 = 2$.

   Déterminons x.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 5 & 10 \end{vmatrix} &= 0 \\ 1\times 10 - 5\times x &= 0 \\ 10 - 5x &= 0 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons une équation linéaire du premier degré que nous allons résoudre en travaillant par équivalences successives.

$$\begin{aligned} 10 - 5x - 10 &= 0 - 10 \\ -5x &= -10 \\ \frac{-5x}{-5} &= \frac{-10}{-5} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x = 2$.

2. De même

$$\begin{aligned} 2\times(2x) - 3\times(1+x) &= 0 \\ 4x - 3 - 3x &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Exercice 16. ⚽

On considère les points $E(5;-1)$, $F(-1;4)$, $G(7;2)$ et $M(1;y)$ où y est un nombre réel.

1. Pour quelle valeur de y le point m appartient-il à (FG) ?
2. Pour quelles valeurs de y les droites (EF) et (GM) sont-elles parallèles ?

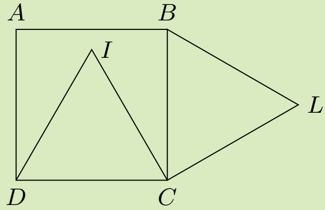
Exercice 17.

Soient $A(4;0)$, $B(0;7)$ et $C(-6;-5)$ des points.

1. Calculez les coordonnées du milieu P de $[AB]$.
2. Calculez les coordonnées des points S et T définis par $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $5\overrightarrow{CT} = 4\overrightarrow{CA}$.
3. Le point P est-il sur la droite (ST) ?

Exercice 18. ☕

Soient $ABCD$ un carré, BCL et DIC des triangles équilatéraux tels que sur la figure ci-contre.
Nous souhaitons établir l'alignement des points A, I et L.
Pour cela considérons le repère orthonormé $(D; C; A)$.



1. Donnez sans justification les coordonnées de D, C, A et B.
2. Déterminez les coordonnées de I et L.
3. Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AL}$.
4. Démontrez l'alignement des points A, I et L.

Exercice 19. ☢

Soient $M(7;3)$, $N(-3;1)$, $C(0;5)$ et $E(3;9)$ des points du plan.

1. Montrez que le quadrilatère $MNCD$ est un trapèze.
2. Montrez que E est le point d'intersection de (NC) et (MD).
3. Soient J et K les milieux respectivement de $[NM]$ et $[CD]$. Calculez les coordonnées de J et K.
4. Montrez que E, J et K sont alignés.

Exercice 20. ☢

Soient $A(3;4)$, $B(1;1)$, $C(6;-2)$ et $D(8;1)$ des points, I le milieu de $[BC]$, et E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}.$$

1. Calculez les coordonnées de I, E et F.
2. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont-ils colinéaires ?
   (b) Qu'en déduisez-vous concernant les droites (BE) et (IF) ?
3. Montrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
4. (a) Calculez la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   (b) $ABCD$est -il un rectangle ?
5. Les points I, F et D sont-ils alignés ?

Correction de l'exercice 20

1. * Déterminons les coordonnées de I.

   Puisque I est le milieu de $[BC]$:

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_B + x_C}{2} \\ &= \frac{1+6}{2} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

De même : $y_I = -\frac{1}{2}$.

$$\boxed{I\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right).}$$

* Déterminons les coordonnées de E.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6-3 \\ -2-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

D'où : $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 3 \\ \frac{1}{3} \times (-6) \end{pmatrix}$ *i.e.* $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

De même : $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - 3 \\ y_E - 4 \end{pmatrix}$.

De $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ nous déduisons donc

$$\left\{ \begin{array}{l} x_E - 3 = 1 \\ y_E - 4 = -2 \end{array} \right.$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_E - 3 + 3 = 1 + 3 \\ y_E - 4 + 4 = -2 + 4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_E = 4 \\ y_E = 2 \end{array} \right.$$

$$\boxed{E(4; 2).}$$

* De même qu'au point précédent

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_F - 6 = \frac{1}{3}(3-6) \\ y_F - (-2) = \frac{1}{3}(4-(-2)) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_F = 5 \\ y_F = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{F(5; 0).}$$

2. (a) Démontrons que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires.

   $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{IF}\right) &= \begin{vmatrix}3 & \frac{3}{2}\\1 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}\\ &= 3\times\frac{1}{2}-1\times\frac{3}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

   $\boxed{\overrightarrow{BE} \text{ et } \overrightarrow{IF} \text{ sont colinéaires.}}$

   (b) Nous déduisons de la question précédente que :

   $\boxed{(BE) \parallel (IF).}$

3. Démontrons que $ABCD$ est un parallélogramme.

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

   Par conséquent :

   $\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$

4. (a) Calculons $||\overrightarrow{AC}||$.

   La formule pour la distance euclidienne est la même que celle pour la norme du vecteur. Par contre comme le repère n'est pas orthonormé la norme ne correspond pas forcément à une longueur.

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{AC}|| &= \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}\\ &= \sqrt{(6-3)^2+(-2-4)^2}\\ &= \sqrt{45}\\ &= \sqrt{3^2\times 5}\\ &= \sqrt{3^2}\times\sqrt{5}\end{aligned}$$

   $\boxed{||\overrightarrow{AC}|| = 3\sqrt{5}.}$

(b) Nous ne pouvons pas répondre à cette question car le repère n'étant a priori pas orthonormé nous ne pouvons pas établir la présence d'angle droit ou d'égalité de longueur (diagonales).

Si nous supposons que le repère est orthonormé alors, comme $||\overrightarrow{BD}|| = 9$, nous pouvons affirmer que les diagonales du parallélogramme $ABCD$ ne sont pas de même longueur donc ce n'est pas un rectangle.

5. Démontrons que les points I, F et D sont alignés.

Ils sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-3\\ -1\end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{IF};\overrightarrow{DF}\right) &= \begin{vmatrix}\frac{3}{2} & -3\\ \frac{1}{2} & -1\end{vmatrix}\\ &= \frac{3}{2}\times(-1) - \frac{1}{2}\times(-3)\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.
Et par conséquent

$$\boxed{I,\ F \text{ et } D \text{ sont alignés.}}$$

Exercice 21.

Soit $ABCD$ un trapèze tel que $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
Les points I et Jsont les milieux de $[AC]$ et de $[BD]$. On se propose de montrer que $(AB) \parallel (IJ)$.

1. Complétez : $\overrightarrow{IJ} = \dots + \overrightarrow{AB} + \dots$ et $\overrightarrow{IJ} = \dots + \overrightarrow{CD} + \dots$.
2. Déduisez-en : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$.
3. Trouvez k tel que $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{AB}$ et concluez.

VI Ce qu'il faut retenir.

1. Vocabulaire et notations relatifs à la colinéarité et au déterminant.
2. Calculer un déterminant.
3. Démontrer une colinéarité et trouver le λ.
4. Démontrer une non colinéarité.

5. Utiliser la colinéarité pour démonter un parallélisme.
6. Utiliser la colinéarité pour démontrer un alignement de points.
7. Utiliser la colinéarité pour démontrer qu'un point appartient à une droite.