

Vecteurs et coordonnées.

I Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Exercice 1. ☹

Dessinez deux points A et B distincts puis placez les points M , N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2. ☹

Soient A et B deux points distincts, I le milieu du segment $[AB]$. Dans chaque cas déterminez le réel λ tel que : $\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{BI} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Exercice 3. ☹

Soient A et B deux points du plan distants de 6 unités de longueur (choisissez deux unités de longueur par centimètre).

1. (a) Construisez le point L tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.
 (b) Construisez le point K tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. (a) En remarquant que le vecteur \overrightarrow{LK} peut s'écrire $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$, établissez une relation entre les vecteurs \overrightarrow{LK} et \overrightarrow{AB} .
 (b) Déduisez-en la longueur LK en unités de longueur.

Correction de l'exercice 3

1. (a)
 (b)
2. (a) D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{LK} &= \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} \\
 &= -\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK} \\
 &= -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \left(-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\right) \\
 &= \left(-\frac{5}{2} - 1 - \frac{4}{3}\right)\overrightarrow{AB} \\
 &= \left(-\frac{5 \times 3}{2 \times 3} - \frac{6}{6} - \frac{4 \times 2}{3 \times 2}\right)\overrightarrow{AB} \\
 &= \frac{-15 - 6 - 8}{6}\overrightarrow{AB}
 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{LK} = -\frac{29}{6}\overrightarrow{AB}.$$

(b) Puisque $\overrightarrow{LK} = -\frac{29}{6}\overrightarrow{AB}$, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{LK}\| &= \left| -\frac{29}{6} \right| \times \|\overrightarrow{AB}\| \\ &= \frac{29}{6} \times AB \\ &= \frac{29}{6} \times 6 \end{aligned}$$

$$LK = 29.$$

Exercice 4. ☉

Soient A , B et C trois points du plan tels que :

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

- Réalisez une figure.
- En remarquant que le vecteur \overrightarrow{AC} peut s'écrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, exprimez le vecteur \overrightarrow{AB} en fonction du vecteur \overrightarrow{BC} en justifiant la réponse.

Correction de l'exercice 4

-
- Par construction

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

ce qui équivaut, d'après la relation de Chasles, à

$$3\overrightarrow{AB} - 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

Finalement

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}.$$

Exercice 5. 🐛

Soit $MNPQ$ un parallélogramme. On définit le point R tel que $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$ et le point S tel que $\overrightarrow{MS} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

1. Réalisez une figure.
2. (a) En remarquant que le vecteur \overrightarrow{MR} peut s'écrire $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$, montrez que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$.
- (b) En remarquant que le vecteur \overrightarrow{NS} peut s'écrire $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS}$, montrez que $\overrightarrow{NS} = -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.
- (c) Déduisez-en une relation entre les vecteurs \overrightarrow{MR} et \overrightarrow{NS} .

Correction de l'exercice 5

- 1.
2. (a) D'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$$

Or, d'après l'énoncé, $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$, donc en substituant :

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$$

(b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NS} &= -\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS} \\ &= -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}\end{aligned}$$

(c) $-\frac{4}{3}\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{NS}$.

Exercice 6. 🐛

Soient $ABCD$ un parallélogramme et S et V des points tels que $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{CD}$.

Montrez que les segments $[VS]$ et $[AC]$ ont le même milieu.

Correction de l'exercice 6

En faisant à main levée une figure nous voyons que $AVCS$ est un parallélogramme et par conséquent ses diagonales se coupent bien en leur milieu. Démonstrons-le proprement.

Montrons que $AVCS$ est un parallélogramme.

Pour cela nous allons démontrer que $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$.

$$\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$$

Or $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et en remplaçant :

$$\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{DC}$$

Comme, par construction, $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CS}$, en considérant les vecteurs opposés, nous en déduisons :

$$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$$

Nous avons bien démontré que $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$ et donc que $AVCS$ est un parallélogramme. Nous en déduisons que ses diagonales

$[VS]$ et $[AC]$ se coupent en leur milieu.

Exercice 7.

Soient ABC un triangle rectangle en A et I est le milieu de l'hypoténuse. On appelle A' le symétrique de A par rapport à I , B' et C' les images de B et C dans la translation de vecteur \overrightarrow{AI} .

Démontrez que A' est le milieu de $[B'C']$.

Correction de l'exercice 7

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{B'I'} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{II'}$$

Or par construction I est milieu de $[AI']$ donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{II'}$, et $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{IA}$ donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'I'} &= \overrightarrow{BI} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

De $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CC'}$ nous déduisons que $BB'C'C$ est un parallélogramme, donc : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$.

Finalement : $\overrightarrow{B'I'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'}$.

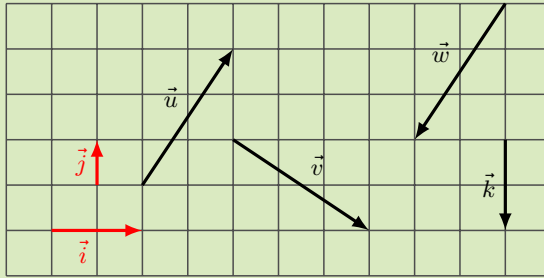
I' est le milieu de $[B'C']$.

II Base de vecteurs.

1 Combinaison linéaire de deux vecteurs.

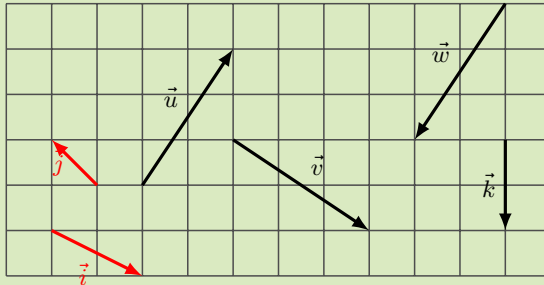
Exercice 8. ☹

Exprimez les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et \vec{k} comme combinaisons linéaires des vecteurs \vec{i} et \vec{j} .



Exercice 9. ☹

Exprimez les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et \vec{k} comme combinaisons linéaires des vecteurs \vec{i} et \vec{j} .



2 Base de vecteurs.

III Vecteurs et coordonnées.

1 Coordonnées de vecteurs relativement à une base.

Exercice 10. ☹

Donnez les coordonnées du vecteur dans la base (\vec{a}, \vec{b}) .

1. $\vec{u} = \vec{b} - 7\vec{a}$.

2. $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 7\vec{a} + 4\vec{a}$.

3. $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ où $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ et $\overrightarrow{CD} = -2\vec{b} + 5\vec{a}$

Exercice 11. ♣

Exercices 49 à 51 page 188 du **manuel Lelivrescolaire**.Correction de l'exercice 11

Exercice 49 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{LK} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{FG} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{d} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$

(b) $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}, \overrightarrow{AC} = 1\vec{i} - 4\vec{j}, \overrightarrow{LK} = 1\vec{i} + 2\vec{j}, \overrightarrow{FG} = 2\vec{i} - 3\vec{j}, \vec{b} = -4\vec{i} - \vec{j},$
 $\vec{d} = -2\vec{j}.$

Exercice 50 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

$A(-1; 1), B(1; 1,5), C(4; 1,5), D(1; -1), E(1; -2), F(7; -2,5).$

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 6 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$

Les coordonnées sont les opposées des précédents.

Exercice 51 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

$A(-2; 3), B(-3; 2), C(-4; 0), D(0; 1), E(-1; -2), F(-3; 0).$

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2 Égalité de vecteurs.

Exercice 12. ♣

Déterminez $x, y \in \mathbb{R}$ de sorte que $\vec{u} = \vec{v}$.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} x+2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 2y+3 \end{pmatrix}.$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} -2x+5 \\ 3y-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 12 \\ -12y+4 \end{pmatrix}.$

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3x^2+x+7 \\ \frac{2}{y} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x-10 \\ \frac{4}{y+1} \end{pmatrix}.$

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} x^2 \\ y+x \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 144 \\ 3y-4 \end{pmatrix}.$

Correction de l'exercice 12

a) $(x, y) = (6, 0).$ b) $(x, y) = \left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{5}\right).$ c) $\emptyset.$ d) $(x, y) = (12, 16).$

Exercice 13. ♣

Exercice 53 page 188 du **manuel Lelivrescolaire**.Correction de l'exercice 13

- $x = 3$ et $y = -4.$
- $x = 3$ et $y = 8.$
- $x = -6.$

3 Norme de vecteurs.

Exercice 14. 🗎

Calculez la norme des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

4 Coordonnées d'un représentant.

Exercice 15. 🗎

Soient $A(-2; 1)$, $B(2; 4)$, $C(3; 0)$ et $D(-1; -3)$ des points du plan muni d'un repère. Démontrons que $ABCD$ est un parallélogramme.

Correction de l'exercice 15

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Démontrons que $\vec{AB} = \vec{DC}$.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ 4 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

De même

$$\vec{DC} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 0 - (-3) \end{pmatrix}$$

$$\vec{DC} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Donc, les vecteurs ayant même coordonnées : $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Et par conséquent

$ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 16. 🗎

Soient $A(-3; 3)$, $B(2; 5)$, $C(4; 0)$ et $D(-1; -2)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrons que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculez AC et BD .
3. Qu'en déduisez-vous sur $ABCD$?

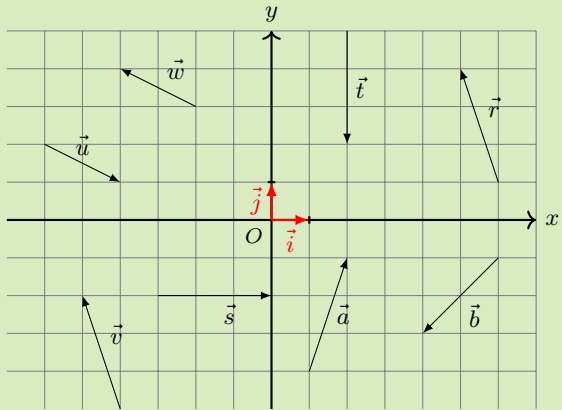
Correction de l'exercice 16

1. Il suffit de procéder comme dans l'exercice précédent
2. Le repère étant orthonormé il suffit d'utiliser la formule $AC = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$.
3. D'après les questions précédentes $ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur. Autrement dit :

$ABCD$ est un rectangle.

Exercice 17. 🦋

Lisez les coordonnées des vecteurs représentés ci-contre et indiquez ceux qui sont égaux.



Exercice 18. 🦋

Soient $A(7; -3)$, $B(3; 2)$ et $C(-5; -4)$ des points du plan muni d'un repère. Déterminez les coordonnées du point $D(x_D; y_D)$ qui vérifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Correction de l'exercice 18

Déterminons x_D et y_D .

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées donc si et seulement si

$$\begin{cases} 3 - 7 = x - (-5) \\ 2 - (-3) = y - (-4) \end{cases}$$

donc, si et seulement si

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$D(-9,1).$$

Une rédaction alternative.

Déterminons x_D et y_D .

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

De plus $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

Autrement dit dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \frac{x_A + x_D}{2} &= \frac{x_B + x_C}{2} & \text{et} & & \frac{y_A + y_D}{2} &= \frac{y_B + y_C}{2} \\ \frac{7 + x_D}{2} &= \frac{3 + (-5)}{2} & \text{et} & & \frac{-3 + y_D}{2} &= \frac{2 + (-4)}{2} \\ & & & & x_D &= -9 & \text{et} & & y_D &= 1 \end{aligned}$$

Nous avons démontré qu'il y a un seul point D qui satisfassent à la condition $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et ses coordonnées sont $(-9; 1)$.

Exercice 19. ☼

Soient $A(2; -3)$ et $B(-1; 4)$ deux points dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Calculez $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Correction de l'exercice 19

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ donc } \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{58}.$$

Exercice 20.

Exercices 54 page 188, 56 page 189 du [manuel Lelivrescolaire](#).

Correction de l'exercice 20

Exercice 54 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

- (a) $G(-1; 2)$, $H(5; -2)$, $M(7; 4)$, $N(0,1)$, $P(3,0)$.
(b)

Exercice 56 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

- (a) Oui.
(b) Non.
(c) Non.

(d) Oui.

Exercice 21. ♣

Exercices 57 et 58 page 189 du **manuel Lelivrescolaire**.Correction de l'exercice 21

Exercice 57 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

- (a) $ABCD$ est un parallélogramme car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
 (b) C est le milieu de $[BE]$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$.
 (c) C est l'image de E par la translation de vecteur \overrightarrow{DA} car $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DA}$.

Exercice 58 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

- (a) M' symétrique de M par la symétrie de centre P ssi P est milieu de $[MM']$, donc ssi $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PM'}$.
 Donc $M'(15; -9)$.
 (b) On en déduit $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$ donc P milieu de $[AC]$.
 (c) D'après les questions précédentes les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu P .

5 Somme vectorielle et coordonnées.

Exercice 22. ♣

Dans un repère on considère les points : $A(-2; 1)$, $B(3; 4)$ et $C(-5; 2)$.Calculez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.Correction de l'exercice 22

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x + 3 - x + (-5) - x = 0 \\ 1 - y + 4 - y + 2 - y = 0 \end{cases}$$

$$M\left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

Exercice 23. ♣

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculez $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
2. Calculez les coordonnées $\vec{u} + \vec{v}$.
3. Montrez que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$.

Correction de l'exercice 23

1. $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{19}$.
2. $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$.

Exercice 24. ✎

1. Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(a) Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :

- | | |
|--|--|
| a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$. | b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. |
| c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$. | d) $\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$. |

(b) Le vecteur $-2\vec{u}$ a pour coordonnées :

- | | |
|--|---|
| a) $\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$. | b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$. |
| c) $\begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$. | d) $\begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$. |

2. Calculez les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ si

- | | |
|---|--|
| a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. | b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$. |
|---|--|

Correction de l'exercice 24

1. (a) $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- (b) $-2\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$.
2. (a) $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.
- (b) $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Exercice 25. ♣

Soient les points $A(-2; 1)$, $B(4; 2)$ et $C(2; 4)$.

1. (a) Montrez que les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont $(6; 1)$.
- (b) Calculez les coordonnées du vecteurs \overrightarrow{AC} .
- (c) Calculez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2. (a) Placez les points dans un repère orthonormé et dessinez le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- (b) Vérifiez le résultat de la question 1.(c).

Correction de l'exercice 25

1. (a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 2 - 1 \end{pmatrix},$
 $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- (b) De même $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$
- (c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$
- 2.

6 Multiplication d'un vecteur par un scalaire avec les coordonnées.

Exercice 26. ♣

Déterminez les coordonnées de $-7\vec{u}$ sachant que $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$

Correction de l'exercice 26

$$-7\vec{u} \begin{pmatrix} 21 \\ -7\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 27. ♣

Les questions sont indépendantes les unes des autres (sauf les deux dernières).

1. Soient $\vec{u}(2, -1)$ et $\vec{v}(1; 2)$.
 - (a) Calculez les coordonnées de $3\vec{u}$ et $2\vec{v}$.
 - (b) Calculez les coordonnées de $3\vec{u} + 2\vec{v}$.
2. Soient $\vec{u}(5; 1)$ et $\vec{v}(2; -3)$. calculez les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$, $2\vec{u}$, $-3\vec{v}$ et $2\vec{u} - 3\vec{v}$.
3. Soient $\vec{u}(0; -1)$, $\vec{v}(3; 4)$ et $\vec{w}(8; -6)$. Calculez la norme de chacun des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .
4. Soient $\vec{u}(0; 5)$ et $\vec{v}(4; -2)$.
 - (a) Calculez la norme de chacun des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .
 - (b) Calculez les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
 - (c) Montrez que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$.
5. Dites en justifiant si la proposition suivante est vraie : « Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ ».

Correction de l'exercice 27

1. 34 page 136.

$$(a) \quad 3\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } 2\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad 3\vec{u} + 2\vec{v} \begin{pmatrix} 6+2 \\ -3+4 \end{pmatrix} \text{ donc } 3\vec{u} + 2\vec{v} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. 92 page 140.

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, 2\vec{u} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}, -3\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}, 2\vec{u} - 3\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

3. 94 page 140.

$$\|\vec{u}\| = 1, \|\vec{v}\| = 5, \|\vec{w}\| = 10.$$

4. 95 page 140.

$$(a) \quad \|\vec{u}\| = 5, \|\vec{v}\| = 2\sqrt{5}.$$

$$(b) \quad \text{i. } \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii. } \|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

5. 96 page 140.

L'affirmation est fausse. Un contre-exemple est fourni par l'exercice précédent.

IV Exercices.

Exercice 28. 🌟

Soient $A(-1; -2)$, $B(5; -1)$, $C(6; 3)$ et $D(0; 2)$ des points considérés dans un repère du plan.

1. Faites un figure.
2. Construisez le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
3. Déterminez les coordonnées de E .
4. Démontrez que $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}$.
5. Que pouvez-vous en déduire?

Exercice 29. 🌟

Soient ABC un triangle et K , L et M les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

1. Démontrez que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BM}$.
2. Déduisez-en \overrightarrow{BC} en fonction de \overrightarrow{KL} .

Correction de l'exercice 29

Si aucune figure n'est demandée il est nécessaire pour aborder un tel exercice de faire un schéma.

1. Comme M est le milieu de $[BC]$:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Donc, d'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

Puisque K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AL}) \\ &= \frac{1}{2} \times 2\overrightarrow{KA} + \frac{1}{2} \times 2\overrightarrow{AL} \\ &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL}\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{KL}$$

2. Puisque M est le milieu de $[BC]$

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$$

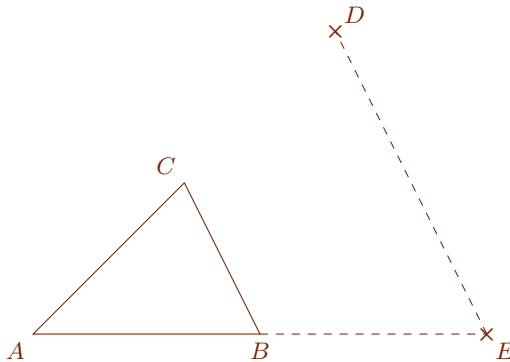
Donc, d'après la question précédente :

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{KL}.$$

Exercice 30. ♣

Soient ABC un triangle, D et E des points tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.
Faites une figure puis démontrez que C est le milieu du segment $[AD]$.

Correction de l'exercice 30



Nous allons utiliser une caractérisation vectorielle du milieu : C est le milieu de $[AD]$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Démontrons que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Pour démontrer cette égalité nous disposons d'informations sur les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BE} , \overrightarrow{ED} et \overrightarrow{BC} . Nous allons, avec la relation de Chasles, nous allons décomposer \overrightarrow{AD} en faisant apparaître tous ces vecteurs. Autrement dit il faut trouver un chemin qui va de A à D et qui passe si possible par B et E (ou C mais il s'avérera que ce n'est pas nécessaire).

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED}$$

Comme $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} \\ &= 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$$

Nous en déduisons finalement

C est le milieu de $[AD]$.

Nous aurions pu aussi utiliser une variante du théorème des milieux.

Exercice 31. 🗎

Soient $ABCD$ un carré non trivial (non réduit à un point), E le symétrique de A par rapport à B et I le milieu de $[BC]$.

1. Faites un croquis à main levée.
2. Justifiez que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé du plan.
3. Déterminez les coordonnées des différents points de la figure puis montrez que I est le milieu de $[DE]$.
4. Démontrez ce résultat sans utiliser de repère.

Correction de l'exercice 31

1. Par construction ABD est un triangle isocèle rectangle en A donc

$$(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}).$$

2. * Du fait du choix du repère : $A(0;0)$, $B(1;0)$, $D(0;1)$.
 * Puisque $ABCD$ est un carré : $C(1;1)$.
 * E est le symétrique de A par rapport à B . Autrement dit B est le milieu de $[AE]$. Nous en déduisons :

$$x_B = \frac{x_A + x_E}{2}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{0 + x_2}{2} \\ 1 \times 2 &= \frac{x}{2} \times 2 \\ 2 &= x_E \end{aligned}$$

et de même pour les ordonnées :

$$y_B = \frac{y_A + y_E}{2}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{0 + y_2}{2} \\ 0 \times 2 &= \frac{x}{2} \times 2 \\ 0 &= y_E \end{aligned}$$

Ainsi : $E(2,0)$.

* Puisque I est le milieu de $[BC]$:

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_B + x_C}{2} \\ &= \frac{1 + 1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_I &= \frac{y_B + y_C}{2} \\ &= \frac{0 + 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc : $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Démontrons que I est le milieu de $[DE]$.

Nous allons simplement vérifier que le milieu de $[DE]$ et I coïncident car ils ont même coordonnées.

Si nous notons M le milieu de $[DE]$ nous avons d'une part

$$\begin{aligned}
 x_M &= \frac{x_D + x_E}{2} \\
 &= \frac{0 + 2}{2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 y_M &= \frac{y_D + y_E}{2} \\
 &= \frac{1 + 0}{2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Donc $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Puisque M et I ont même coordonnées nous pouvons affirmer

I est le milieu de $[DE]$.

3. En utilisant le théorème des milieux.

Exercice 32. 🎯

On considère un carré $ABCD$ non réduit à un point.

1. Justifiez que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan. Est-il orthonormé?
2. Justifiez que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et en déduire les coordonnées du point C dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
3. On considère le point E symétrique de A par rapport à B et le point F symétrique de F par rapport à D .
Déterminez les coordonnées des points E et F dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
4. Que semble représenter le point C par rapport aux points E et F ? Démontrez le par au moins 3 méthodes différentes.

Correction de l'exercice 32

1. $ABCD$ est un carré donc ABD est un triangle isocèle rectangle en A . Par conséquent

$(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé.

2. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, d'après l'identité du parallélogramme

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Calculons les coordonnées de C .

* D'une part $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$,

* d'autre part $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} (1-0) + (0-0) \\ (0-0) + (1-0) \end{pmatrix}$,

nous en déduisons donc : $x_C = 1$ et $y_C = 1$.

$$C(1; 1).$$

3. Puisque E est la symétrique de A par rapport à B , B est le milieu de $[AE]$ et, par conséquent, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$.

Comme $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nous en déduisons $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 2 \times 1 \\ 2 \times 0 \end{pmatrix}$ i.e. $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mais $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{cases} x_E = 2 \\ y_E = 0 \end{cases}$$

$$E(2; 0).$$

En procédant de même

$$F(0; 2).$$

4. C est le milieu de $[EF]$.

Voici trois méthodes pour le démontrer :

* Montrer avec les coordonnées que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CF}$.

* En calculant les coordonnées du milieu de $[EF]$ nous nous rendons compte qu'elles coïncident avec celles de C .

* En utilisant le théorème des milieux. Ceci dit il faudrait expliciter le fait que C est dans le même demi-plan délimité par (AD) que F .

Exercice 33. ✎

Soient T , R et I trois points non alignés.

Les points U et V sont définis par :

- $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{IR} + \overrightarrow{TI}$
- $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TI} + \overrightarrow{TR}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IT} + \overrightarrow{TR}$.
- (b) Conclure.

Exercice 34. ✎

Soient T , R et I trois points non alignés. On définit les points A , B et C par :

- $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{RT} - \overrightarrow{IT}$
- $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{TI}$
- $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RI}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.
- (b) En déduire une expression des vecteurs \overrightarrow{BA} et \overrightarrow{AC} en fonction de \overrightarrow{RT} puis conclure.

Correction de l'exercice 34

- 1.
- 2.
3. (a) D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} \\ &= -\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} \\ &= \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}\end{aligned}$$

De même : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.

- (b) D'après la question précédente :

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$$

Donc, d'après l'énoncé :

Exercice 35.