Vecteurs et coordonnées.

I Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Il paraît naturel de noter : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$. En généralisant nous définirons n'importe quel vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$, λ désignant un réel.

Définition 1

Soient $\overrightarrow{AB}$ le représentant d'un vecteur et λ un nombre quelconque.
Nous définissons le vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$ par

- $\lambda\overrightarrow{AB}$ a même direction que $\overrightarrow{AB}$
- la norme : $\left\|\lambda\overrightarrow{AB}\right\| = |\lambda| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$
- si $\lambda > 0$ alors $\lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même sens et si $\lambda < 0$ alors ils sont de sens contraire.

Remarques.

1. Plutôt que d'apprendre cette définition sachez l'utiliser. Les vecteurs ont même direction, la longueur est multipliée par autant que l'indique λ et le sens dépend du signe de λ.
2. Nous retrouverons les règles habituelles de distributivité, de commutativité, d'associativité.
   Si λ et μ sont des nombres et $\vec{u}$ et $\vec{w}$ des vecteurs, alors
   $$\lambda(\vec{u}+\vec{w}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{w}, \quad (\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u}, \quad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$$
3. L'addition et la multiplication par un nombre sont les deux opérations qui définissent de façon très général un espace vectoriel.

Exercice 1. ☯
Dessinez deux points A et B distincts puis placez les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2. ☯
Soient A et B deux points distincts, I le milieu du segment $[AB]$.
Dans chaque cas déterminez le réel λ tel que : $\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{BI} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Exercice 3. ⚽

Soient A et B deux points du plan distants de 6 unités de longueur (choisissez deux unités de longueur par centimètre).

1. (a) Construisez le point L tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.
   (b) Construisez le point K tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{LK}$ peut s'écrire $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$, établissez une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Déduisez-en la longueur LK en unités de longueur.

Correction de l'exercice 3

1. (a)
   (b)
2. (a) D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{LK} &= \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} \\
&= -\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK} \\
&= -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \left(-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \left(-\frac{5}{2} - 1 - \frac{4}{3}\right)\overrightarrow{AB} \\
&= \left(-\frac{5\times 3}{2\times 3} - \frac{6}{6} - \frac{4\times 2}{3\times 2}\right)\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{-15-6-8}{6}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{LK} = -\frac{29}{6}\overrightarrow{AB}.}$$

   (b) Puisque $\overrightarrow{LK} = -\frac{29}{6}\overrightarrow{AB}$, nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{LK}\right\| &= \left|-\frac{29}{6}\right| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\
&= \frac{29}{6} \times AB \\
&= \frac{29}{6} \times 6
\end{aligned}$$

$$\boxed{LK = 29.}$$

Exercice 4. ⚽

Soient A, B et C trois points du plan tels que :

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

1. Réalisez une figure.
2. En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ peut s'écrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, exprimez le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$ en justifiant la réponse.

Correction de l'exercice 4

1.
2. Par construction

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

ce qui équivaut, d'après la relation de Chasles, à

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AB} - 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}.}$$

Exercice 5.

Soit $MNPQ$ un parallélogramme. On définit le point R tel que $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$ et le point S tel que $\overrightarrow{MS} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

1. Réalisez une figure.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{MR}$ peut s'écrire $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$, montrez que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$.

   (b) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{NS}$ peut s'écrire $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS}$, montrez que $\overrightarrow{NS} = -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

   (c) Déduisez-en une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{NS}$.

Correction de l'exercice 5

1.

2. (a) D'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$$

Or, d'après l'énoncé, $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$, donc en substituant :

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$$

(b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NS} &= -\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS}\\ &= -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}\end{aligned}$$

(c) $-\frac{4}{3}\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{NS}$.

Exercice 6. ⚽

Soient $ABCD$ un parallélogramme et S et V des points tels que $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{CD}$.
Montrez que les segments $[VS]$ et $[AC]$ ont le même milieu.

Correction de l'exercice 6

En faisant à main levé une figure nous voyons que $AVCS$ est un parallélogramme et par conséquent ses diagonales se coupent bien en leur milieu. Démontrons-le proprement.

Montrons que $AVCS$ est un parallélogramme.

Pour cela nous allons démontrer que $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$.

$$\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$$

Or $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et en remplaçant :

$$\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{DC}$$

Comme, par construction, $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CS}$, en considérant les vecteurs opposés, nous en déduisons :

$$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$$

Nous avons bien démontré que $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$ et donc que $AVCS$ est un parallélogramme. Nous en déduisons que ses diagonales

$[VS]$ et $[AC]$ se coupent en leur milieu.

Exercice 7.

Soient ABC un triangle rectangle en A et I est le milieu de l'hypoténuse. On appelle A' le symétrique de A par rapport à I, B' et C' les images de B et C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.
Démontrez que A' est le milieu de $[B'C']$.

Correction de l'exercice 7

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{B'I'} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{II'}$$

Or par construction I est milieu de $[AI']$ donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{II'}$, et $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{IA}$ donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'I'} &= \overrightarrow{BI} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

De $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CC'}$ nous déduisons que $BB'C'C$ est un parallélogramme, donc : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$.

Finalement : $\overrightarrow{B'I'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'}$.

I' est le milieu de $[B'C']$.

II Base de vecteurs.

1 Combinaison linéaire de deux vecteurs.

Définition 2

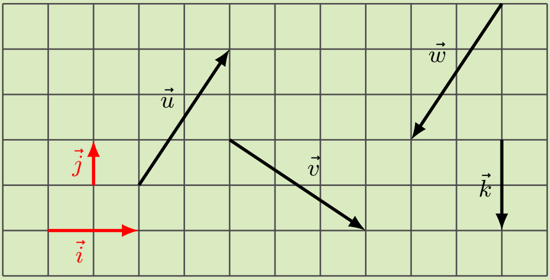
Soient
. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan,
. a et b deux réels.

Nous dirons que le vecteur $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est une *combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$*.

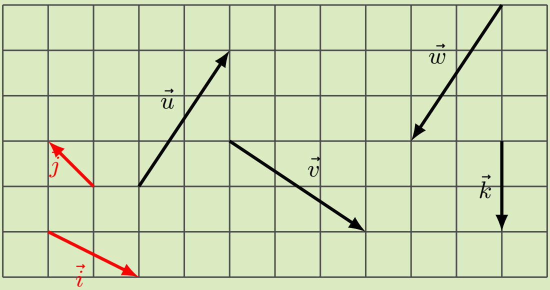
Remarques.

1. C'est pourquoi la branche des mathématiques traitant des vecteurs est appelée l'*algèbre linéaire* : *algèbre* à cause des calculs et *linéaire* à cause des *combinaisons linéaires* (et de l'origine historique).

Exercice 8. ☯
Exprimez les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{k}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



Exercice 9. ⚽
Exprimez les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{k}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



2 Base de vecteurs.

Définition 3

Soient
. $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan,
. O un point du plan,
. I l'image de O par la translation de vecteur $\vec{i}$,
. J l'image de O par la translation de vecteur $\vec{j}$.

Nous dirons que $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est *une base du plan* si et seulement si $(O;I,J)$ est un repère du plan.

Remarques.

1. Pour que $(O;I,J)$ soit un repère il faut que les points O, I et J soient distincts et non alignés.
2. Autrement dit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'ont pas la même direction et ne sont pas nuls.
3. Si de plus $(O;I,J)$ est un repère orthonormé alors nous dirons que $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est *une base orthonormée*.
4. Nous pourrons dorénavant parler du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Un repère est complètement défini pr la donnée d'un point et d'une base.

III Vecteurs et coordonnées.

1 Coordonnées de vecteurs relativement à une base.

En utilisant les bases et les combinaisons linéaires nous pouvons définir les coordonnées d'un vecteur. Par exemple le vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$ aura pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Définition 4

Soient :

. $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base du plan,

. $\vec{u}$ un vecteur du plan.

Il existe un unique couple de réels (x,y) de nombres réels x et y tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Le couple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est appelé le couple des *coordonnées* de $\vec{u}$.

Remarques.

1. De même que les coordonnées d'un point dépendent du repère choisi, les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie.
2. Pour une base fixée les coordonnées du vecteur sont uniques.

   Cette affirmation constitue un théorème qu'il faudrait démontrer ce que nous nous garderons de faire.

3. Les vecteurs de la base sont les vecteurs, en nombre minimum, qui permettent de décrire n'importe qu'elle translation.
4. Concrètement pour obtenir les coordonnées d'un vecteur dans un repère il suffit de compter les carreaux en suivant l'axe des abscisses puis recommence suivant l'axe des ordonnées, en partant de l'origine pour rejoindre l'extrémité.

5. Les coordonnées de vecteurs sont plutôt notées en colonne qu'en ligne

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

   x est appelé l'abscisse et y l'ordonnée.

6. Si M est l'extrémité du représentant de $\vec{u}$ d'origine O alors M et $\vec{u}$ ont les mêmes coordonnées.

Exercice 10. ☯

Donnez les coordonnées du vecteur dans la base $(\vec{a},\vec{b})$.

1. $\vec{u} = \vec{b} - 7\vec{a}$.
2. $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 7\vec{a} + 4\vec{a}$.
3. $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ où $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ et $\overrightarrow{CD} = -2\vec{b} + 5\vec{a}$

Exercice 11. ⚽

Exercices 49 à 51 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

Correction de l'exercice 11

Exercice 49 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{d}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.

(b) $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 1\vec{i} - 4\vec{j}$, $\overrightarrow{LK} = 1\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{FG} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = -4\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = -2\vec{j}$.

Exercice 50 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

$A(-1;1)$, $B(1;1{,}5)$, $C(4;1{,}5)$, $D(1;-1)$, $E(1;-2)$, $F(7;-2{,}5)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0{,}5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2{,}5\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}6\\-0{,}5\end{pmatrix}$.

Les coordonnées sont les opposées des précédents.

Exercice 51 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

$A(-2;3)$, $B(-3;2)$, $C(-4;0)$, $D(0;1)$, $E(-1;-2)$, $F(-3;0)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

2 Égalité de vecteurs.

Proposition 1

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées (dans la même base).

Démonstration

Ce résultat découle directement de l'unicité des coordonnées admises dans la précédente définition.

■

Exercice 12. ☯

Déterminez $x,y \in \mathbb{R}$ de sorte que $\vec{u} = \vec{v}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} x+2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 2y+3 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2x+5 \\ 3y-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 12 \\ -12y+4 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3x^2+x+7 \\ \frac{2}{y} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x-10 \\ \frac{4}{y+1} \end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix} x^2 \\ y+x \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 144 \\ 3y-4 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12

a) $(x,y) = (6,0)$. b) $(x,y) = \left(-\frac{7}{2},\frac{3}{5}\right)$. c) $\varnothing$. d) $(x,y) = (12,16)$.

Exercice 13. ⚽

Exercice 53 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

Correction de l'exercice 13

1. $x = 3$ et $y = -4$.
2. $x = 3$ et $y = 8$.
3. $x = -6$.

3 Norme de vecteurs.

Définition 5

Soient :

. $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan,

. $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur.

Nous appellerons norme de $\vec{u}$, et nous noterons $||\vec{u}||$, le nombre

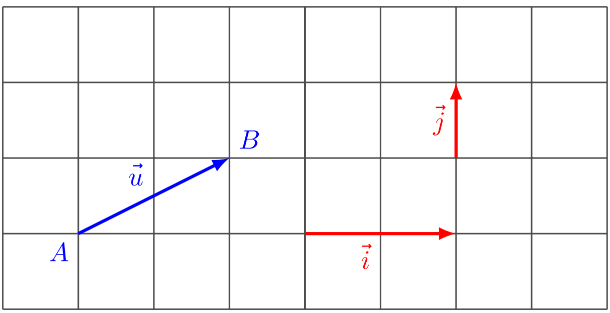
$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemples.

1. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} ||\vec{u}|| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 7^2} \\ &= \sqrt{58} \end{aligned}$$

2. On considère le quadrillage ci-dessous formé de carrés d'un centimètre de côte.



$AB = \sqrt{5}$ et

$$\begin{aligned} ||\vec{u}|| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Longueur et norme ne coïncident pas toujours.

Remarques.

1. La norme d'un vecteur est un nombre positif.
2. Nous avions déjà donné une définition de la norme d'un vecteur dans le cas d'un vecteur au sens géométrique (représentant du vecteur). Cette définition se veut un peu plus général puisqu'elle fonctionne pour d'autres sortent de vecteurs. Cependant cette définition de la norme dépend de la base choisie.
3. La norme d'un vecteur peut se confondre avec la longueur si le repère est orthonormé.

Exercice 14. ☯

Calculez la norme des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$.

4 Coordonnées d'un représentant.

Proposition 2

Soient :

. (O,I,J) un repère du plan,

. $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ des points dans ce repère,

. $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ la base associée au repère $(O;I,I)$ ($i.e$ $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$$

Démonstration

Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=x_B\vec{i}+y_B\vec{j}-\left(x_A\vec{i}+x_A\vec{i}\right)\\&=(x_B-x_A)\,\vec{i}+(y_B-y_A)\,\vec{j}\end{aligned}$$

Donc

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}.$$

■

Remarques.

1.

Exercice 15. ☯
Soient $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(3;0)$ et $D(-1;-3)$ des points du plan muni d'un repère.
Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.

Correction de l'exercice 15

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Démontrons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 4-1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

De même

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 0-(-3) \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Donc, les vecteurs ayant même coordonnées : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Et par conséquent

$$\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

Exercice 16. ⚽
Soient $A(-3;3)$, $B(2;5)$, $C(4;0)$ et $D(-1;-2)$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculez AC et BD.
3. Qu'en déduisez-vous sur $ABCD$?

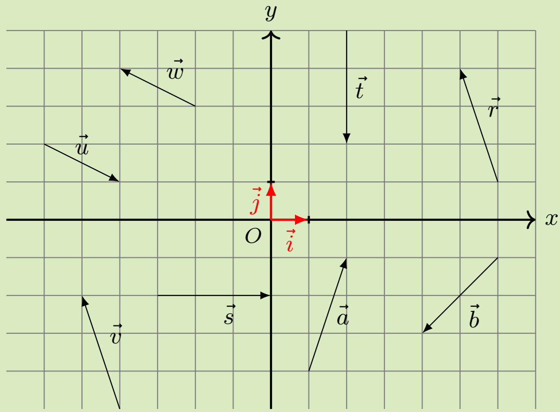
Correction de l'exercice 16

1. Il suffit de procéder comme dans l'exercice précédent
2. Le repère étant orthonormé il suffit d'utiliser la formule
   $AC = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$.
3. D'après les questions précédentes $ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur. Autrement dit :

   $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 17.

Lisez les coordonnées des vecteurs représentés ci-contre et indiquez ceux qui sont égaux.



Exercice 18.

Soient $A(7;-3)$, $B(3;2)$ et $C(-5;-4)$ des points du plan muni d'un repère.
Déterminez les coordonnées du point $D(x_D;y_D)$ qui vérifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Correction de l'exercice 18

Déterminons x_D et y_D.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées donc si et seulement si

$$\begin{cases} 3 - 7 = x - (-5) \\ 2 - (-3) = y - (-4) \end{cases}$$

donc, si et seulement si

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = 1 \end{cases}$$

$D(-9{,}1)$.

Une rédaction alternative.

Déterminons x_D et y_D.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

De plus $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

Autrement dit dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
\frac{x_A + x_D}{2} = \frac{x_B + x_C}{2} \quad &\text{et} \quad \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{y_B + y_C}{2} \\
\frac{7 + x_D}{2} = \frac{3 + (-5)}{2} \quad &\text{et} \quad \frac{-3 + y_D}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} \\
x_D = -9 \quad &\text{et} \quad y_D = 1
\end{aligned}$$

> Nous avons démontré qu'il y a un seul point D qui satisfassent à la condition $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et ses coordonnées sont $(-9; 1)$.

Exercice 19. ⚽

Soient $A(2;-3)$ et $B(-1;4)$ deux points dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Calculez $||\overrightarrow{AB}||$.

<u>Correction de l'exercice 19</u>

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ donc $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{58}$.

Exercice 20.

Exercices 54 page 188, 56 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

<u>Correction de l'exercice 20</u>

Exercice 54 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $G(-1;2)$, $H(5;-2)$, $M(7;4)$, $N(0{,}1)$, $P(3{,}0)$.

(b)

Exercice 56 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) Oui.

(b) Non.

(c) Non.

(d) Oui.

Exercice 21. ⚽
Exercices 57 et 58 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

Correction de l'exercice 21

Exercice 57 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $ABCD$ est un parallélogramme car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

(b) C est le milieu de $[BE]$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$.

(c) C est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$ car $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DA}$.

Exercice 58 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) M' symétrique de M par la symétrie de centre P ssi P est milieu de $[MM']$, donc ssi $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PM'}$.
Donc $M'(15; -9)$.

(b) On en déduit $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$ donc P milieu de $[AC]$.

(c) D'après les questions précédentes les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu P.

5 Somme vectorielle et coordonnées.

Proposition 3

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$.

Exercice 22. ☯
Dans un repère on considère les points : $A(-2; 1)$, $B(3; 4)$ et $C(-5; 2)$.
Calculez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Correction de l'exercice 22

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x + 3 - x + (-5) - x = 0 \\ 1 - y + 4 - y + 2 - y = 0 \end{cases}$$

$$M\left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

Exercice 23.

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

1. Calculez $||\vec{u}||$ et $||\vec{v}||$.
2. Calculez les coordonnées $\vec{u}+\vec{v}$.
3. Montrez que $||\vec{u}+\vec{v}|| = 5$.

Correction de l'exercice 23

1. $||\vec{u}|| = 5$ et $||\vec{v}|| = \sqrt{19}$.
2. $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
3. $||\vec{u}+\vec{v}|| = 5$.

Exercice 24.

1. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$.
   (a) Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées :
   - a) $\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$.
   - b) $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.
   - c) $\begin{pmatrix}1\\12\end{pmatrix}$.
   - d) $\begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix}$.

   (b) Le vecteur $-2\vec{u}$ a pour coordonnées :
   - a) $\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$.
   - b) $\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$.
   - c) $\begin{pmatrix}-4\\-10\end{pmatrix}$.
   - d) $\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}$.
2. Calculez les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ si
   - a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.
   - b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 24

1. (a) $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

   (b) $-2\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}$.
2. (a) $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$.

(b) $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$.

Exercice 25.

Soient les points $A(-2;1)$, $B(4;2)$ et $C(2;4)$.

1. (a) Montrez que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(6;1)$.
   (b) Calculez les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Calculez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
2. (a) Placez les points dans un repère orthonormé est dessinez le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
   (b) Vérifiez le résultat de la question 1.(c).

Correction de l'exercice 25

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-(-2)\\2-1\end{pmatrix}$,
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$.
   (b) De même $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
   (c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$.
2.

6 Multiplication d'un vecteur par un scalaire avec les coordonnées.

Proposition 4

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$.

Exercice 26.

Déterminez les coordonnées de $-7\vec{u}$ sachant que $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 26

$-7\vec{u}\begin{pmatrix}21\\-7\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Exercice 27. ⚽

Les questions sont indépendantes les unes des autres (sauf les deux dernières).

1. Soient $\vec{u}(2, -1)$ et $\vec{v}(1;2)$.
   (a) Calculez les coordonnées de $3\vec{u}$ et $2\vec{v}$.
   (b) Calculez les coordonnées de $3\vec{u} + 2\vec{v}$.
2. Soient $\vec{u}(5;1)$ et $\vec{v}(2;-3)$. calculez les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$, $2\vec{u}$, $-3\vec{v}$ et $2\vec{u}-3\vec{v}$.
3. Soient $\vec{u}(0;-1)$, $\vec{v}(3;4)$ et $\vec{w}(8;-6)$. Calculez la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
4. Soient $\vec{u}(0;5)$ et $\vec{v}(4;-2)$.
   (a) Calculez la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   (b) Calculez les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
   (c) Montrez que $||\vec{u}+\vec{v}|| = 5$.
5. Dites en justifiant si la proposition suivante est vraie : « Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $||\vec{u}+\vec{v}|| = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ ».

Correction de l'exercice 27

1. 34 page 136.
   (a) $3\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ et $2\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.
   (b) $3\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix}6+2\\-3+4\end{pmatrix}$ donc $3\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$.
2. 92 page 140.
   $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$, $2\vec{u}\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}$, $-3\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$, $2\vec{u}-3\vec{v}\begin{pmatrix}4\\11\end{pmatrix}$.
3. 94 page 140.
   $||\vec{u}|| = 1$, $||\vec{v}|| = 5$, $||\vec{w}|| = 10$.
4. 95 page 140.
   (a) $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 2\sqrt{5}$.
   (b) i. $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
   ii. $||\vec{u}+\vec{v}|| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$.
5. 96 page 140.
   L'affirmation est fausse. Un contre-exemple est fourni par l'exercice précédent.

IV Exercices.

Exercice 28. ⚽

Soient $A(-1;-2)$, $B(5;-1)$, $C(6;3)$ et $D(0;2)$ des points considérés dans un repère du plan.

1. Faites un figure.
2. Construisez le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
3. Déterminez les coordonnées de E.
4. Démontrez que $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}$.
5. Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 29. ⚽

Soient ABC un triangle et K, L et M les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

1. Démontrez que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BM}$.
2. Déduisez-en $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$.

Correction de l'exercice 29

Si aucune figure n'est demandée il est nécessaire pour aborder un tel exercice de faire un schéma.

1. Comme M est le milieu de $[BC]$:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Donc, d'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

Puisque K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AL}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times 2\overrightarrow{KA} + \frac{1}{2}\times 2\overrightarrow{AL}\\ &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL}\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{KL}}$$

2. Puisque M est le milieu de $[BC]$

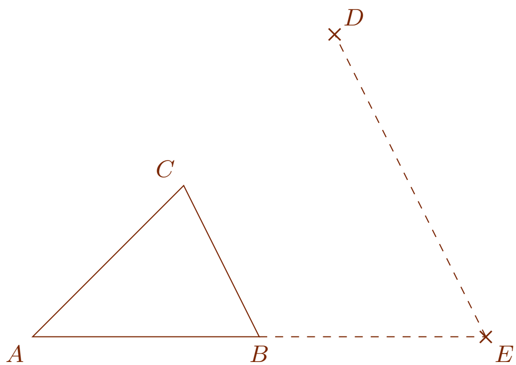
$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$$

Donc, d'après la question précédente :

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{KL}.}$$

Exercice 30. ⚽
Soient ABC un triangle, D et E des points tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.
Faites une figure puis démontrez que C est le milieu du segment $[AD]$.

Correction de l'exercice 30



Nous allons utiliser une caractérisation vectorielle du milieu : C est le milieu de $[AD]$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Démontrons que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Pour démontrer cette égalité nous disposons d'informations sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BC}$. Nous allons, avec la relation de Chasles, nous allons décomposer $\overrightarrow{AD}$ en faisant apparaître tous ces vecteurs. Autrement dit il faut trouver un chemin qui va de A à D et qui passe si possible par B et E (ou C mais il s'avérera que ce n'est pas nécessaire).

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED}$$

Comme $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}\\&=2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}&=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}\\&=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$$

Nous en déduisons finalement

C est le milieu de $[AD]$.

Nous aurions pu aussi utiliser une variante du théorème des milieux.

Exercice 31. ☯

Soient $ABCD$ un carré non trivial (non réduit à un point), E le symétrique de A par rapport à B et I le milieu de $[BC]$.

1. Faites un croquis à main levé.
2. Justifiez que $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé du plan.
3. Déterminez les coordonnées des différents points de la figure puis montrez que I est le milieu de $[DE]$.
4. Démontrez ce résultat sans utiliser de repère.

Correction de l'exercice 31

1. Par construction ABD est un triangle isocèle rectangle en A donc

   $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

2. * Du fait du choix du repère : $A(0;0)$, $B(1;0)$, $D(0;1)$.
   * Puisque $ABCD$ est un carré : $C(1;0)$.
   * E est le symétrique de A par rapport à B. Autrement dit B est le milieu de $[AE]$. Nous en déduisons :

$$x_B=\frac{x_A+x_E}{2}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{0+x_2}{2} \\ 1\times 2 &= \frac{x}{2}\times 2 \\ 2 &= x_E \end{aligned}$$

et de même pour les ordonnées :

$$y_B = \frac{y_A + y_E}{2}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{0+y_2}{2} \\ 0\times 2 &= \frac{x}{2}\times 2 \\ 0 &= y_E \end{aligned}$$

Ainsi : $E(2{,}0)$.

* Puisque I est le milieu de $[BC]$:

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_B + x_C}{2} \\ &= \frac{1+1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_I &= \frac{y_B + y_C}{2} \\ &= \frac{0+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc : $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Démontrons que I est le milieu de $[DE]$.

Nous allons simplement vérifier que le milieu de $[DE]$ et I coïncident car ils ont même coordonnées.

Si nous notons M le milieu de $[DE]$ nous avons d'une part

$$
\begin{aligned}
x_M &= \frac{x_D + x_E}{2} \\
&= \frac{0+2}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
y_M &= \frac{y_D + y_E}{2} \\
&= \frac{1+0}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Donc $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$.
Puisque M et I ont même coordonnées nous pouvons affirmer

$$\boxed{I \text{ est le milieu de } [DE].}$$

3. En utilisant le théorème des milieux.

Exercice 32. ⚽

On considère un carré $ABCD$ non réduit à un point.

1. Justifiez que $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère du plan. Est-il orthonormé ?
2. Justifiez que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et en déduire les coordonnées du point C dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
3. On considère le point E symétrique de A par rapport à B et le point F symétrique de F par rapport à D.
   Déterminez les coordonnées des points E et F dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
4. Que semble représenter le point C par rapport aux points E et F ? Démontrez le par au moins 3 méthodes différentes.

Correction de l'exercice 32

1. $ABCD$ est un carré donc ABD est un triangle isocèle rectangle en A. Par conséquent

$$\boxed{\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \text{ est un repère orthonormé.}}$$

2. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, d'après l'identité du parallélogramme

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Calculons les coordonnées de C.

* D'une part $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$,
* d'autre part $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} (1-0)+(0-0) \\ (0-0)+(1-0) \end{pmatrix}$,

nous en déduisons donc : $x_C = 1$ et $y_C = 1$.

$$C(1;1).$$

3. Puisque E et le symétrique de A par rapport à B, B est le milieu de $[AE]$ et, par conséquent, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$.
Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nous en déduisons $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 2\times 1 \\ 2\times 0 \end{pmatrix}$ *i.e.* $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Mais $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{cases} x_E = 2 \\ y_E = 0 \end{cases}$$

$$E(2;0).$$

En procédant de même

$$F(0;2).$$

4. C est le milieu de $[EF]$.
Voici trois méthodes pour le démontrer :

* Montrer avec les coordonnées que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CF}$.
* En calculant les coordonnées du milieu de $[EF]$ nous nous rendons compte qu'elles coïncident avec celles de C.
* En utilisant le théorème des milieux. Ceci dit il faudrait expliciter le fait que C est dans le même demi-plan délimité par (AD) que F.

Exercice 33.

Soient T, R et I trois points non alignés.
Les points U et V sont définis par :

- $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{IR} + \overrightarrow{TI}$
- $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TI} + \overrightarrow{TR}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IT} + \overrightarrow{TR}$.
   (b) Conclure.

Exercice 34.

Soient T, R et I trois points non alignés. On définit les points A, B et C par :

- $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{RT} - \overrightarrow{IT}$
- $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{TI}$
- $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RI}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.
   (b) En déduire une expression des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{RT}$ puis conclure.

Correction de l'exercice 34

1.
2.
3. (a) D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\\ &= -\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}\\ &= \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}\end{aligned}$$

De même : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.

(b) D'après la question précédente :

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$$

Donc, d'après l'énoncé :

Exercice 35.