De nouvelles relations trigonométriques.

I Rappel de la définition du collège.

Définition 1

Soient A, B et C trois points de l'euclidien.

Si ABC es rectangle en A alors on définit

(i) le cosinus de $\widehat{ABC}$ par

$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) := \frac{AB}{BC}.$$

(ii) le sinus de $\widehat{ABC}$ par

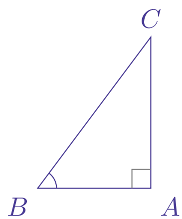
$$\sin\left(\widehat{ABC}\right) := \frac{AC}{BC}.$$

(iii) la tangente de $\widehat{ABC}$ par

$$\tan\left(\widehat{ABC}\right) := \frac{AC}{AB}.$$

Remarques.

1. Pour ceux qui manque d'imagination et qui ne sont pas capable de faire un schéma à main levée :



2. Rappelons les moyens mnémotechniques de retrouver ces formules. Les cosinus s'obtient par « côté adjacent sur hypoténuse », le sinus par « côté opposé sur hypoténuse » et la tangente par « côté opposé sur côté adjacent »
3. Puisque la somme des angles d'un triangle est 180° et puisque le triangle est rectangle, nous avons forcément $0 < \widehat{ABC} < 90$.
   Autrement dit on ne peut calculer $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ que si $\theta \in]0; 90[$.
4. Il est maintenant toujours possible de calculer les cosinus, sinus et tangente de tout angle dont la mesure en degré est dans $]0; 90[$. Il suffit d'imaginer que

l'on considère un projeter orthogonal de façon à faire apparaître un triangle rectangle.

5. D'après notre définition cos, sin et tan sont toujours positifs.

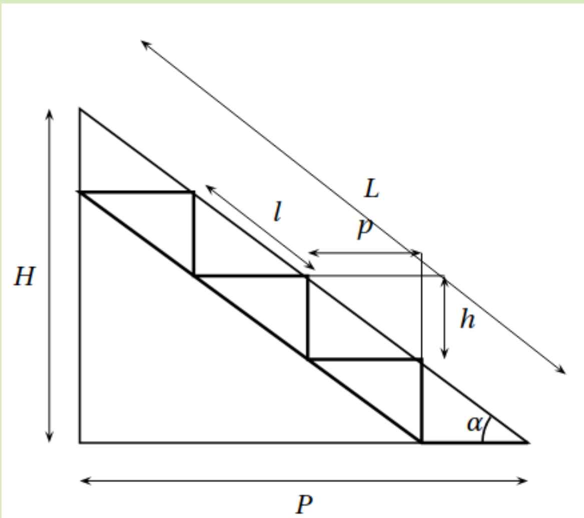
Exemples.

1. Calcul d'angle.
2. Calcul de longueur (numérateur).
3. Calcul de longueur dénominateur.
4. Calcul d'angle.

Exercice 1. ⚽

Un escalier droit est constitué de trois marches en bois.
À l'aide du dessin en coupe ci-dessous et des dimension données, $h = 18$ cm, $p = 24$ cm, calculer

1. les dimensions H et P,



2. les dimensions l et L,
3. la tangente de l'angle α.
4. En utilisant la table suivante, donner la mesure de α à 1 degré près par excès.

α	30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°
$\tan\alpha$	0,577	0,601	0,625	0,649	0,675	0,700	0,727

α	37°	38°	39°	40	41°	42°	
$\tan\alpha$	0,754	0,781	0,810	0,839	0,869	0,900	

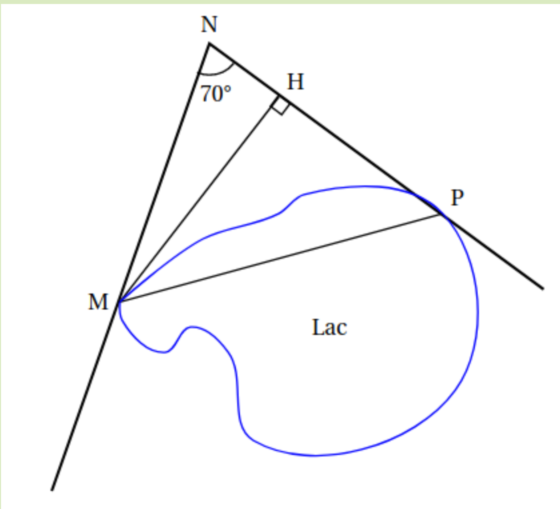
Correction de l'exercice 1

1. $H = 4h = 4 \times 18 = 72$.
   $P = 4p = 4 \times 24 = 96$.
2. $l = \sqrt{h^2 + p^2} = 30$ et $L = \sqrt{L^2 + P^2} = 120$.
3. $\tan(\alpha) = \frac{H}{P} = \frac{72}{96} = \frac{3}{4}$.
4. $\alpha \approx 37$.

Exercice 2. ⚽

La mesure directe des distances est parfois difficile ou impossible. Par contre, certains appareils permettent la mesure des angles avec une grande précision.
On se propose de déterminer la largeur du lac représenté ci-après, entre le point M et le point P. L'appareil de mesure est placé en un point N et donne $\widehat{\text{MNP}} = 70°$; de plus, on a MN = 500 et NP = 400, l'unité de longueur étant le mètre.
On désigne par H le projeté orthogonal de M sur la droite (NP).
On ne demande pas de refaire la figure.

1. En utilisant $\sin\left(\widehat{\text{MNP}}\right)$ et $\cos\left(\widehat{\text{MNP}}\right)$, calculer les distances MH et NH. (Pour faire ces calculs, on prendra 0,94 comme valeur approchée de sin(70°) et 0,34 comme valeur approchée de cos(70°).)
2. En déduire la distance HP.
3. Calculer MP^2 puis MP (on donnera une valeur approchée entière par défaut de ce dernier résultat).



Correction de l'exercice 2

1. $MH = 500 \times \sin(70) \approx 470$ et $NH = 500\cos(70 \approx 170$.

2. $HP = NP - NH = 400 - 170 = 230$.
3. $MP = \sqrt{MH^2 + HP^2} \approx 523$.

Exercice 3. ⚽

1. On considère un rectangle ABCD tel que AB = 10 cm et AD = 6 cm, le point E du segment [AB] tel que AE = 4 cm et le point F du segment [BC] tel que BF = 4 cm.
   (a) Faire une figure.
   (b) Calculer $\tan\left(\widehat{\mathrm{AED}}\right)$ et $\tan\left(\widehat{\mathrm{BEF}}\right)$.
   En déduire une valeur approchée au 1/10$^{\mathrm{e}}$ de degré près de la mesure des angles $\widehat{\mathrm{AED}}$ et $\widehat{\mathrm{BEF}}$.
   Quelle est la nature du triangle DEF (en raisonnant avec les précédentes valeurs approchées) ?
2. Soit x un nombre réel *strictement positif*.
   On considère un rectangle ABCD tel que AB = $x + 6$ et AD = $x + 2$.
   Soit E le point du segment [AB] tel que AE = x et soit F le point du segment [BC] tel que BF = x (l'unité est le cm).
   (a) Pour quelle valeur de x obtient-on le rectangle de la question 1 ?
   (b) Exprimer DE^2, EF^2 et DF^2 en fonction de x.
   (c) Déterminer x pour que le triangle DEF soit rectangle en E.
   Pouvait-on prévoir ce résultat ?
   (d) On désigne par S l'aire du triangle ADE et par S' l'aire du rectangle ABCD.
   Exprimer S et S' en fonction de x.
   Déterminer x pour que S' soit le triple de S.

Correction de l'exercice 3

1. (a) $\tan\left(\widehat{\mathrm{AED}}\right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. $\widehat{\mathrm{AED}} \approx 56{,}3$.
   $\tan\left(\widehat{\mathrm{BEF}}\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. $\widehat{\mathrm{BEF}} \approx 33{,}7$.
   En raisonnant avec les valeurs approchées, la somme des angles du triangle valant 180 ...
2. (a) $x = 4$.
   (b) $DE^2 = (x+2)^2 + x^2$, $EF^2 = 6^2 + x^2$, $DF^2 = 2^2 + (6+x)^2$.
   (c)

$$\begin{aligned}
DE^2 + EF^2 &= DF^2 \\
x^2 + 4x + 4 + x^2 + 36 + x^2 &= 4 + 36 + 12x + x^2 \\
3x^2 + 4x + 40 &= x^2 + 12x + 40 \\
2x^2 - 8x &= 0 \\
2x(x-4) &= 0
\end{aligned}$$

$x = 0$ ou $x = 4$.

(d) $S = \frac{x(x+2)}{2}$ et $S' = (x+2)(x+6)$.

$$\begin{aligned} S' &= 2S \\ x^2 + 8x + 12 &= \frac{3}{2}x(x+2) \\ 2x^2 + 16x + 24 &= x^2 + 2x \\ x^2 + 14x + 24 &= 0 \end{aligned}$$

À ce stade il reste à trouver des valeurs approchées à la calculatrice.

Cependant en factorisant précocement il était possible de trouver les solutions :

$$\begin{aligned} (x+2)(x+6) &= \frac{3}{2}x(x+2) \\ (x+2)(x+6) - \frac{3}{2}x(x+2) &= 0 \\ (x+2)\left[(x+6) - \frac{3}{2}x\right] &= 0 \\ (x+2\left(-\frac{1}{2}x+6\right) &= 0 \\ x = -2 \quad \text{ou} \quad x &= 12 \end{aligned}$$

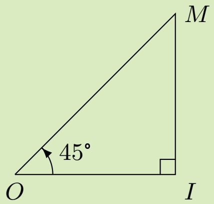
Exercice 4. ☯

Soit ABC un triangle tel que $AB = 12$, $BC = 5$ et $AC = 13$.

1. Démontrez que ABC est rectangle.
2. Calculez la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 5. ☢

Soient OIM un triangle rectangle en I tel que $\widehat{IOM} = 45°$.



1. (a) Justifiez que OIM est isocèle.
   (b) Exprimez OI en fonction de OM.
2. Déterminez, grâce à la définition du cosinus , une expression de OI en fonction de $\cos(45)$ et OM.
3. Nous supposons de plus que $OM = 1$. Déduisez-en une valeur exacte de $\cos(45)$.

Correction de l'exercice 5

1. (a) La somme des mesures des angles d'un triangle doit être égale à 180° donc (en degré)
$$45 + 90 + \widehat{OMI} = 180.$$
D'où : $\widehat{OMI} = 180 - 90 - 45 = 45$.
Ainsi $\widehat{OMI} = \widehat{IOM}$ et par conséquent
$$\boxed{OIM \text{ est isocèle en } I.}$$
   (b) OIM est rectangle en I donc, d'après le théorème de Pythagore :
$$OI^2 + IM^2 = OM^2.$$
Comme de plus OIM est isocèle en I :
$$2OI^2 = OM^2$$
ce qui équivaut à
$$OI^2 = \frac{1}{2}OM^2$$

Puisque OI est une longueur nécessairement :

$$\begin{aligned} OI &= \sqrt{\frac{1}{2}OM^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{OM^2} \\ &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{OM^2} \\ &= \frac{\sqrt{1}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \cdot \sqrt{OM^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{OI = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{OM^2}.}$$

2. Puisque OIM est rectangle en I

$$\cos\left(\widehat{IOM}\right) = \frac{OI}{OM}.$$

Donc

$$\boxed{OI = OM \times \cos(45).}$$

3. Des deux questions précédentes nous déduisons par transitivité

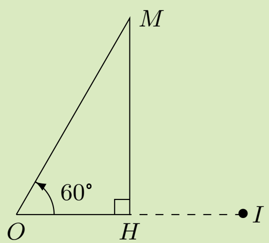
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{OM^2} = OM \times \cos(45).$$

Et puisque OM est une longueur donc un nombre positif :

$$\boxed{\cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

Exercice 6. ☢

Soient OHM un triangle rectangle en H tel que $OM = 1$ et $\widehat{HOM} = 60°$, I le symétrique de O par rapport à H.



1. (a) Justifiez que $OI = 1$.
   (b) Déduisez-en la longueur OH.
2. En utilisant la définition du cosinus donnez une égalité liant OH et $\cos(60)$. Puis déduisez-en une valeur exacte de $\cos(60)$.
3. En remarquant que $MH = \cos(30)$, trouvez une expression radicale de $\cos(30)$.

Correction de l'exercice 6

1. (a) Puisque $\widehat{HOM} = 60°$ et puisque I est le symétrique de O par rapport à H, nécessairement $\widehat{MIH} = 60°$.
   Le triangle IOM ayant deux angles dont la mesure est 60° il est donc équilatéral.
   Comme $OM = 1$ finalement
   $$\boxed{OI = 1.}$$
   (b) Puisque I est le symétrique de O par rapport à H :
   $$OH = \frac{1}{2}OI.$$
   $$\boxed{OH = \tfrac{1}{2}.}$$
2. Puisque OHM est rectangle en H
   $$\cos\left(\widehat{HOM}\right) = \frac{OH}{OM}$$
   $$\cos(60) = \frac{OH}{1}$$
   Donc
   $$\boxed{OH = \cos(60).}$$
   En tenant compte du résultat de la question précédente
   $$\boxed{\cos(60) = \tfrac{1}{2}.}$$
3. La somme des mesures des angles d'un triangle vaut π donc $\widehat{HOM} = 30$.
   En utilisant la définition de collège du cosinus nous obtenons bien $MH = \cos(30)$.

   Le triangle OHM est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore : $HM = \sqrt{\frac{3}{4}}$.
   Donc
   $$\boxed{\cos(30) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Proposition 1 - Relation liant sinus, cosinus et tangente.

Soient A, B et C trois points de l'euclidien.

Si ABC est rectangle en A alors en notant $\theta = \widehat{ABC}$,

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} &= \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AC}{BC}} \\ &= \frac{AB}{AC} \times \frac{BC}{AC} \\ &= \frac{AB}{AC} \\ &= \tan(\theta)\end{aligned}$$

■

Puisque nous pouvons calculer des cosinus sans qu'il y ait de triangle rectangle (a priori), dans quel cas a-t-on un triangle rectangle ?

Proposition 2 - Relation tan, cos et sin.

Soient A, B et C trois points du plan euclidien tels que $\widehat{ABC} = \theta \in]0;90[$.

Les propositions suivantes sont équivalentes deux à deux.

(i) ABC est rectangle en A.

(ii) $\cos(\theta) = \dfrac{AB}{BC}$.

(iii) $\sin(\theta) = \dfrac{AC}{BC}$.

(iv) $\tan(\theta) = \dfrac{AC}{AB}$.

Démonstration

Avec une projection orthogonale et la définition des fonctions trigonométriques.

■

Remarques.

1. Ce résultat permet de démontrer qu'un triangle est rectangle grâce au fonctions trigonométriques.

Exercice 7. ☯

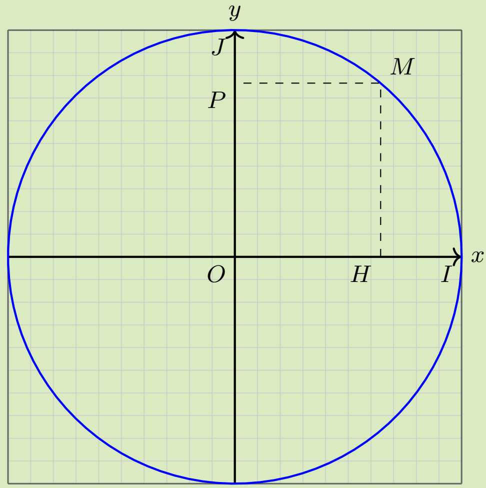
Soient ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} = 30°$, $AB = \frac{10}{3}\sqrt{3}$, M un point de $[BC]$ tel que $BM = 5$ et $BC = 12$.

1. Démontrez que M est le projeté orthogonal de A sur (BC).
2. Calculez l'aire de ABC.

II Le cercle trigonométrique et une nouvelle relation.

Exercice 8. ☯

On considère dans un repère orthonormé (O,I,J) le cercle de centre O et de rayon 1.
Soit M un point mobile sur le premier arc de cercle *overset~IJ*.
On note H et P les projetés orthogonaux de M respectivement sur (OI) et (OJ). On note aussi θ la mesure en degré de $\widehat{IOM}$.



1. Exprimez les longueurs OH et OP en fonction de θ.
2. Justifiez que $x_M = x_H = OH$.
3. Justifiez que $y_M = y_P = OP$.
4. Exprimez OM en fonction de θ.

Nous voyons que le cosinus et le sinus d'un angle peuvent être vus comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point sur le cercle trigonométrique.

C'est une belle opportunité de changer de définition... à suivre l'année prochaine.

Proposition 3 - Relation entre sinus et cosinus.

$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$

Démonstration

Faite au cours du précédent exercice.

■

Corollaire 1 - Montrer qu'un triangle est rectangle.

Soient A, B et C trois points du plan euclidien tels que $\widehat{ABC} = \theta \in]0;90[$.

ABC est rectangle en A si et seulement si : $\cos(\theta) = \dfrac{AB}{BC}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{AC}{BC}$.

Démonstration

Avec Pythagore et la précédente proposition.

■

Remarques.

1. Ce résultat permet de démontrer qu'un triangle est rectangle grâce au fonctions trigonométriques.
2. Ce résultat est en fait bien moins intéressant que celui de la proposition 2.

III Exercices.

Exercice 9. - Formules d'Al-Kashi.

On considère un triangle ABC dont les angles sont aigus.
On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
On note aussi H le pied de la hauteur issue de A et $x = BH$.

1. (a) Démontrez que $b^2 = AH^2 + (a-x)^2$ et que $AH^2 = c^2 - x^2$.
   (b) Déduisez-en l'égalité : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ax$.
2. Démontrez que $x = c \times \cos\left(\widehat{ABC}\right)$.
3. Démontrez l'égalité $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\left(\widehat{ABC}\right)$.
4. De façon analogue on peut démontrer l'égalité $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\left(\widehat{BCA}\right)$. Écrivez la troisième égalité que l'on peut obtenir.
5. Si ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $BC = 8$ et $\widehat{ABC} = 65°$. Calculez la longueur AC, arrondie au dixième.

Correction de l'exercice 9

1. (a) ACH est rectangle en H par construction donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$AH^2 + HC^2 = AC^2$$

ce qui équivaut, puisque $HC = |x - a|$ (les angles de ABC sont aigüs donc $H \in [BC]$), à :

$$AH^2 + (x-a)^2 = b^2$$

De même ABH est rectangle en H donc :

$$AH^2 + x^2 = c^2.$$

(b) Ainsi nous avons $AH^2 = b^2 - (x-a)^2$ et $AH^2 = c^2 - x^2$ donc, par transitivité :

$$b^2 - (x-a)^2 = c^2 - x^2$$

En développant :

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 + 2ax + a^2 = c^2 - x^2 b^2 - x^2 + 2ax + a^2 + x^2 &= c^2 - x^2 + x^2 \\ b^2 + 2ax - a^2 &= c^2 \\ b^2 + 2ax - a^2 + a^2 - 2ax &= c^2 + a^2 - 2ax \end{aligned}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ax \ (1).}$$

2. AHB est rectangle en H donc

$$\begin{aligned} \cos\left(\widehat{ABC}\right) &= \frac{x}{c} \\ \cos\left(\widehat{ABC}\right) \times c &= \frac{x}{c} \times c \end{aligned}$$

$$\boxed{x = \cos\left(\widehat{ABC}\right).}$$

3. En substituant l'expression de x trouvée à la question précédente dans (1) :

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\left(\widehat{ABC}\right).}$$

4. En procédant à une permutation circulaire sur les lettres a, b et c :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\widehat{BAC}\right).$$

5. En utilisant la formule obtenue à la question 3 :

$$\begin{aligned} AC &= BC^2 + AB^2 - 2 \times BC \times AB\cos\left(\widehat{ABC}\right) \\ &= 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6\cos(65) \\ &\approx 59{,}42 \text{ en tronquant au centième.} \end{aligned}$$

$$AC \approx 59{,}4.$$