Vecteurs et translations.

I Définition par la translation.

1 Définition.

Nous définirons un *vecteur* $\vec{u}$ comme le déplacement associé à une translation t. Nous dirons que t est *la translation de vecteur* $\vec{u}$.

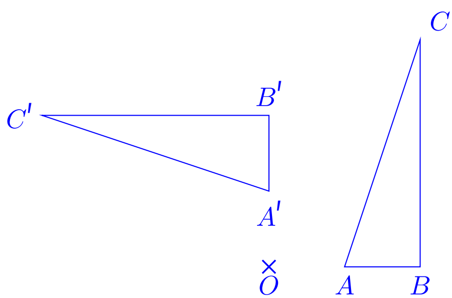
Remarques.

1. Cette définition manque de rigueur puisque la notion de « déplacement » reste dans le flou. La définition de la translation elle-même est assez peu précise puisque cette transformation est définie par ce qu'elle ne fait pas.
2. Les transformations du plan à connaître : symétrie centrale, symétrie axiale, rotation, homothétie et translation.
3. Les transformations du plan sont des fonctions qui a des points associent d'autres points. Si la translation t transforme M en N nous utiliserons la notation fonctionnelle : $t(M) = N$.

   Parfois, pour préciser le déplacement $\vec{u}$ correspondant à la translation nous écrirons $t_{\vec{u}}$.

Exemples.

1. $A'B'C'$ est l'image de ABC par la rotation de centre O et d'angle 90°.



2. Homothétie.
3. Symétrie axiale.
4. Symétrie centrale.

Exercice 1.

Définition 1

Soient :

. t une translation du plan de vecteur $\vec{u}$,

. M et N deux points du plan.

Si $t(M) = N$, alors nous dirons que $\overrightarrow{MN}$ est *un représentant du vecteur $\vec{u}$* correspondant à la translation qui transforme M en N.

Exemples.

1.
2.

Remarques.

1. Si $\overrightarrow{MN}$ est un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ alors nous définissons
   — la *norme du vecteur* par : $\|\vec{u}\| = MN$,
   — la *direction du vecteur* qui est la droite (MN),
   — le *sens du vecteur $\vec{u}$* : de M vers N.
2. Il n'y a pas unicité du représentant.
3. Pour le représentant $\overrightarrow{MN}$, M est appelé *l'origine* et N est appelé *l'extrémité*.

Exercice 2.

Correction de l'exercice 2

1. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{GH}$.
2. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$.
3. $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{DC}$.

Exercice 3.

2 Égalité de représentants.

Définition 2

Soient :

. A, B, M et N des points.

Nous dirons que les représentants *$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux* si et seulement si il existe une translation t (de vecteur $\vec{u}$) telle que $t(M) = N$ et $t(A) = B$.

Remarques.

1. Ainsi des vecteurs (non nuls cf infra) sont égaux si et seulement si ils ont même norme, même direction et même sens.
2. Cette égalité n'est pas tout à fait une égalité au sens usuel puisque $M \neq A$ et $N \neq B$. Mais ces représentants correspondent au même déplacement.

Proposition 1

Deux représentants $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ d'un vecteur $\vec{u}$ sont égaux si et seulement si $ABNM$ est un parallélogramme.

Démonstration

Une démonstration intuitive : il faut que les vecteurs aient les mêmes norme, direction et sens.

$\blacksquare$

Remarques.

1. Nous confondrons dorénavant les représentants et les vecteurs (puisqu'ils indiquent tous le même déplacement, la même translation) en disant : le vecteur $\overrightarrow{MN}$.
2. Nous appellerons *vecteur nul*, et nous noterons $\vec{u}$, le vecteur correspondant à une absence de déplacement. Un représentant du vecteur nul serait, par exemple, $\overrightarrow{MM}$. Le vecteur nul n'a ni sens ni direction et sa norme est nulle.
3. Cette proposition est une équivalence : il y a une forme directe et une forme réciproque. Dans cette leçon nous l'utiliserons beaucoup pour démontrer que des représentants sont égaux mais nous pouvons aussi l'utiliser pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

Exemples.

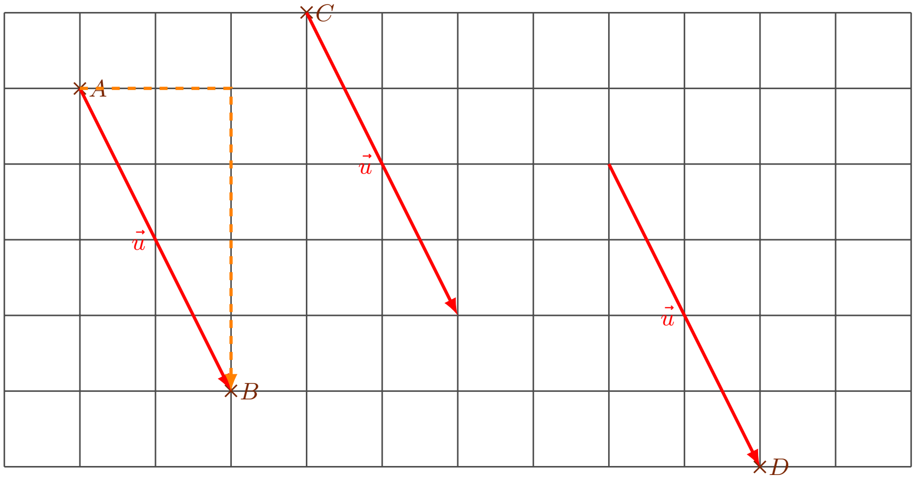
1. Vecteur pour un déplacement.
2. Vecteur pour une position d'un point M dans un repère (O, I, J) : $\overrightarrow{OM}$.
3. Vecteur pour une force. Avec point d'application. Comme le poids s'appliquant au centre de gravité.
4. Vecteur pour un champ de force : le vent, gravitation, champ gravitationnel.
5. Vecteur vitesse. Avec point d'application. $\vec{v}$.
6. Des vecteurs partout : fonctions, tableaux de nombres (matrices) et notamment les coordonnées.

Exercice 4. ♥

Choisissez A, B, C et D des points distincts et non alignés du plan sur le quadrillage de votre feuille.
Notons $\vec{u}$ un vecteur dont $\overrightarrow{AB}$ est un représentant.

1. Dessinez le représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$.
2. Dessinez le représentant de $\vec{u}$ d'origine C.
3. Dessinez le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité D.

Correction de l'exercice 4



Exercice 5. ♥

Recommencez le précédent exercice en choisissant maintenant les points hors le quadrillage et en utilisant règle et compas.

Exercice 6.

Correction de l'exercice 6

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{BA}$.

Exercice 7.

Vous ferez cet exercice avec puis sans l'aide d'un quadrillage.
Placez trois points distinct et non alignés A, B et C puis tracez :

1. Le représentant de $\overrightarrow{AB}$ d'origine C.
2. Le représentant de $\overrightarrow{BC}$ d'extrémité A.

Exercice 8.

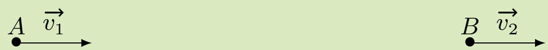
Correction de l'exercice 8

a vrai. b vrai. c faux. d faux.e faux.

Exercice 9.

En physique on représente la vitesse instantanée d'un corps en mouvement par un vecteur.
La direction, le sens et la norme de vecteur sont donnés respectivement par la trajectoire, le sens du déplacement et la valeur algébrique de la vitesse (célérité). On a représenté ci-dessous la vitesse d'une sprinteuse (assimilée au point A) à deux instants successifs de sa course.

À l'instant t_1 — À l'instant t_1

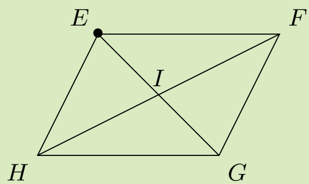


Entre T_1 et t_2 l'athlète a-t-elle ralenti ou accéléré ?

Correction de l'exercice 9

La norme de $\vec{v}_2$ est moindre donc il correspond à une décélération.

Exercice 10.



1. Donnez un vecteur égale à

   a) $\overrightarrow{EF}$. b) $\overrightarrow{GH}$. c) $\overrightarrow{EH}$. d) $\overrightarrow{GF}$.

2. Complétez par le point qui convient.

   a) $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{I\ldots}$. b) $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{I\ldots}$. c) $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{I\ldots}$.

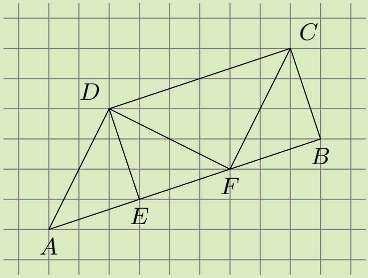
Correction de l'exercice 10

1. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE}$.
2. $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{IF}$ $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{IH}$.

Exercice 11.

Par lecture graphique indiquez

1. un vecteur égale à $\overrightarrow{AE}$; à $\overrightarrow{CF}$.
2. un vecteur de même direction que $\overrightarrow{CB}$ mais de sens opposé ; idem pour $\overrightarrow{AF}$.
3. un vecteur égale à $\overrightarrow{DC}$ d'extrémité F ; égale à $\overrightarrow{FB}$ d'origine A.
4. deux vecteurs de même de direction, de même sens qui ne sont pas égaux.
5. deux vecteurs de même norme qui ne sont pas égaux.



Correction de l'exercice 11

1. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FB}$. $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DA}$.
2. $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{FE}$.
3. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AE}$.
4. $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DC}$.
5. $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{FC}$.

Exercice 12.

Exercices 35 page 185 du manuel Lelivrescolaire.

Correction de l'exercice 12

- $RSTU$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST}$.
- Par construction : $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{FE}$.

Des deux points précédents nous déduisons par transitivité : $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{FE}$. Autrement dit $STEF$ est un parallélogramme.

On en déduit que $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{TE}$.
Or $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{RS}$ donc $\overrightarrow{TE} = \overrightarrow{RS}$.
Autrement dit

$RSET$ est un parallélogramme,

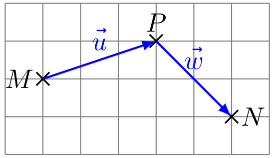
Exercice 13.

II Somme de vecteurs.

1 Définition.

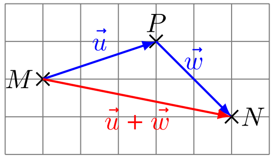
Soient $\vec{u}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs et M un point du plan.

Notons P l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ et N celle de P par la translation de vecteur $\vec{w}$.



Si nous devons interpréter le déplacement total en terme de translation nous dirons que

N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN} = \vec{u} + \vec{w}$.



Ce résultat qui permet de définir une somme de vecteur, se formalise sous forme de

Définition 3

Soient :

. t_1 et t_2 deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{w}$,

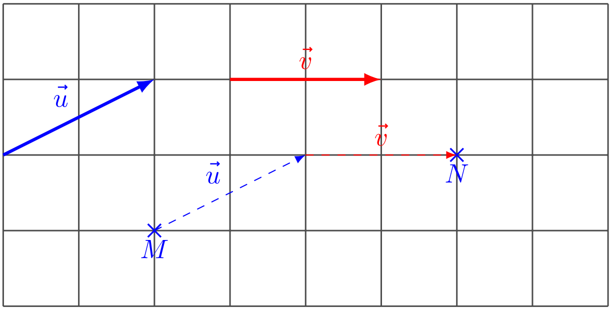
. M et N deux points du plan.

Nous dirons que N est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{w}$ si

$$t_2\left[t_1(M)\right] = N.$$

Exemples.

1. Dessinons un représentant de la somme de deux vecteurs.

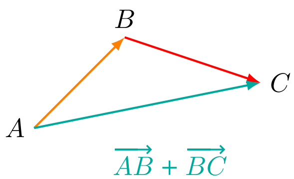


2 Dessiner la somme de représentants de vecteurs : la relation de Chasles.

Proposition 2 - Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points du plan.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Remarques.

1. Pour dessiner le représentant de la somme il faut choisir deux représentants des vecteurs qui « se suivent » : l'extrémité d'un représentant est l'origine de l'autre représentant à sommer.
2. Nous utiliserons aussi cette relation pour « calculer » avec des vecteurs, *i.e.* essentiellement pour simplifier les expressions.
3. La somme de vecteurs est commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

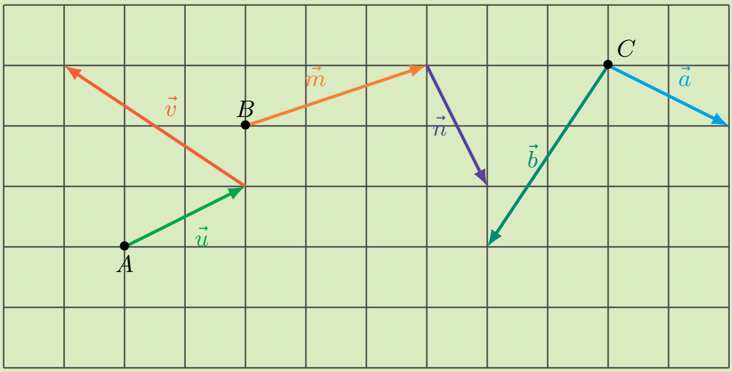
Exercice 14. ♥

Choisissez 4 points A, B, C et D non alignés et hors du quadrillage.
Construisez un représentant du vecteur somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

Exercice 15.

Recommencez l'exercice précédent en choisissant des points du quadrillage et en utilisant celui-ci pour répondre à la question.

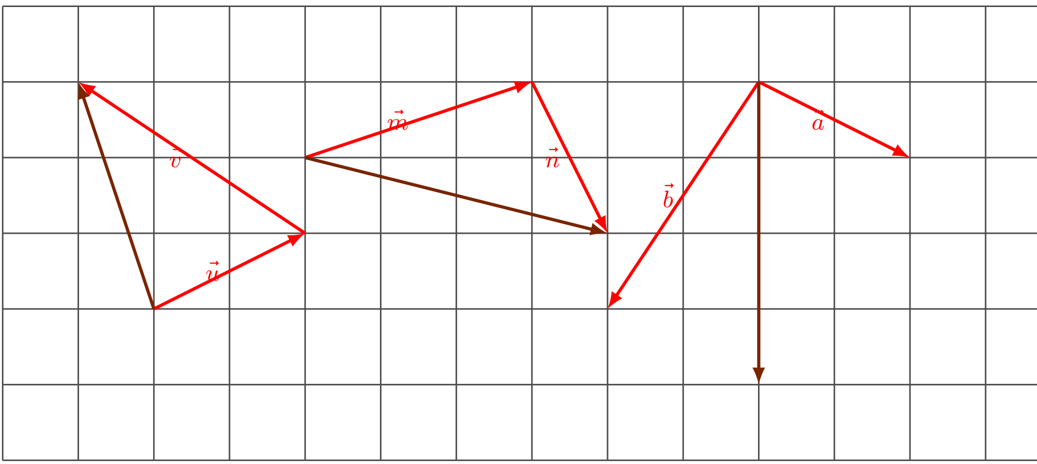
Exercice 16.



Reproduisez puis construisez :

1. le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$;
2. le représentant d'origine B du vecteur $\vec{m} + \vec{n}$;
3. le représentant d'origine C du vecteur $\vec{a} + \vec{b}$;

Correction de l'exercice 16



Exercice 17.

Exercice 39 page 186 du manuel Lelivrescolaire : écrire des relations de Chasles.

Exercice 18.
Exercice 41 page 186 du manuel Lelivrescolaire : écrire des relations de Chasles.

Exercice 19.
Exercice 36 page 186 du manuel Lelivrescolaire : démonstration nature quadrilatère.

3 Vecteurs opposé et nul.

En considérant le cas de la somme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ nous sommes naturellement amenés à considérer le vecteur que nous avons appelé *le vecteur nul*, que nous noterons $\overrightarrow{0}$. En effet la première translation transforme A en B et la seconde B en A : globalement il n'y a pas de déplacement.

Le vecteur nul ne possède ni sens ni direction et sa norme est nulle.

Nous écrirons donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Par analogie avec la somme des nombres nous dirons que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont *opposés* et nous écrirons

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

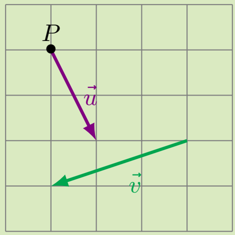
De même que pour les nombres nous simplifierons les écritures en utilisant la *soustraction de vecteur* : $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$.

Nous pourrons donc manipuler les vecteurs comme des nombres en les additionnant, en les soustrayant, en prenant leurs opposés, etc.

Nous verrons dans la leçon sur les droites que les vecteurs et les droites sont intimement liés. Si bien que nous arriverons au résultat voulu par Grassmann : calculer avec des lignes.

Exercice 20.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
On veut construire le représentant d'origine P du vecteur $\vec{u}-\vec{w}$, c'est-à-dire du vecteur $\vec{u}+(-\vec{w})$.



1. Reproduisez la figure et nommer Q l'extrémité du vecteur $\vec{u}$.
2. Construisez le représentant d'origine Q du vecteur $-\vec{w}$.

Exercice 21.

En choisissant des points judicieux complétez.

1. $\overrightarrow{AB}+\cdots=\overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{G\ldots}+\overrightarrow{B\ldots}=\overrightarrow{GI}$
3. $\overrightarrow{\ldots B}+\overrightarrow{B\ldots}=\overrightarrow{CG}$
4. $\overrightarrow{BE}+\cdots=\overrightarrow{BD}$
5. $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\ldots F}=\overrightarrow{B\ldots}$
6. $\overrightarrow{B\ldots}+\overrightarrow{\ldots A}=\overrightarrow{BA}$
7. $\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{G\ldots}=\overrightarrow{B\ldots}$
8. $\overrightarrow{\ldots E}+\overrightarrow{E\ldots}=\overrightarrow{BC}$
9. $\overrightarrow{A\ldots}+\overrightarrow{B\ldots}=\overrightarrow{AC}$
10. $\overrightarrow{O\ldots}+\overrightarrow{M\ldots}=\overrightarrow{\ldots P}$
11. $\overrightarrow{A\ldots}+\overrightarrow{D\ldots}+\overrightarrow{M\ldots}=\overrightarrow{AG}$

Exercice 22.

Soient A, B, C, E, G et I des points du plan. Simplifiez les expressions suivantes (grâce notamment à la relation de Chasles).

1. $\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{CG}$
2. $\overrightarrow{GE}-\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{CG}$
3. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GE}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{CG}$

Exercice 23.

Simplifiez les expressions.

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$
2. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB}$

Correction de l'exercice 23

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$.
3. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BA}$.

Exercice 24.

Démontrez.

1. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.
2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
3. $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$.
4. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
5. $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$
6. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

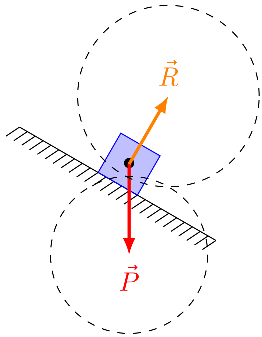
Exercice 25.

Exercice 38 page 186 du manuel Lelivrescolaire : démonstration nature.

4 Dessiner la somme de vecteurs : identité du parallélogramme.

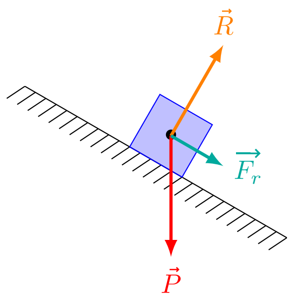
Un glaçon est placé sur un plan incliné. Nous supposerons qu'il n'est soumis qu'a son propre poids $\vec{P}$ et à la réaction du sol $\vec{R}$ (pas de force de frottement, pas de force d'Archimède, etc). Nous avons représenté le bilan des forces appliquées au centre de gravité (ou centre d'inertie).

Nous recherchons la force résultante, $\overrightarrow{F_r}$, *i.e.* la somme de toutes les forces appliquées au glaçon.



Plutôt que de dessiner le représentant de $\vec{R}$ ayant pour origine l'extrémité de $\vec{P}$ nous allons construire le parallélogramme.
Ainsi

$$\vec{P} + \vec{R} = \overrightarrow{F_r}$$

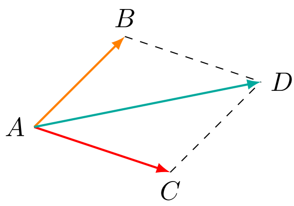


Mathématiquement nous retiendrons :

Proposition 3 - Identité du parallélogramme.

Soient A, B, C et D des points du plan.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ équivaut à dire que $ABDC$ est un parallélogramme.



Remarques.

1. Nous utiliserons ce résultat pour dessiner le vecteur somme lorsque les représentants additionnés ont la même origine.
2. Cette identité est plus rarement utilisée dans les calculs que la relation de Chasles.

Exercice 26. ♥

Dessinez trois points A, B et C non alignés hors des quadrillages de votre feuille et dessinez le vecteur somme $\vec{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Exercice 27.

Exercice 24 page 184 du manuel Lelivrescolaire.

Exercice 28.

Exercice 47 page 187 du manuel Lelivrescolaire.

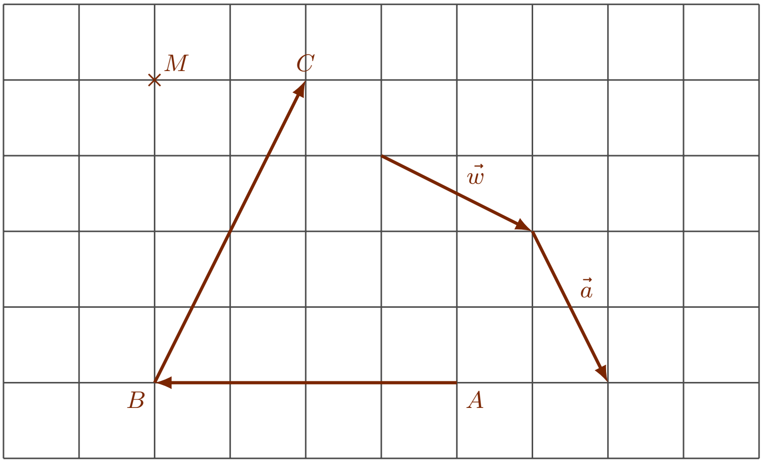
III Exercices.

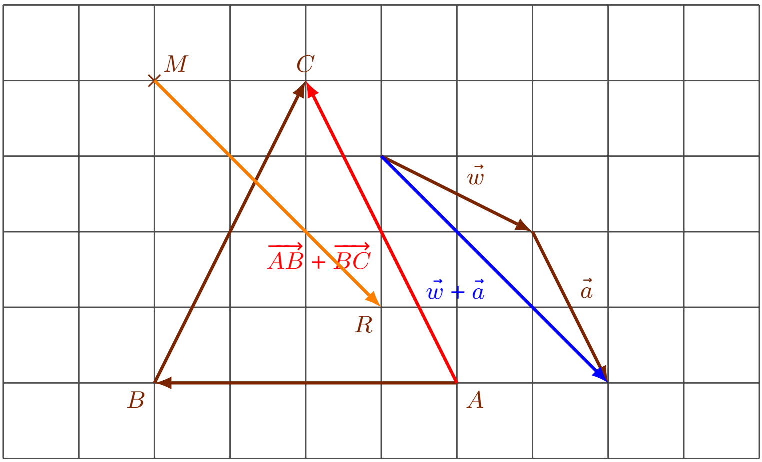
Exercice 29.

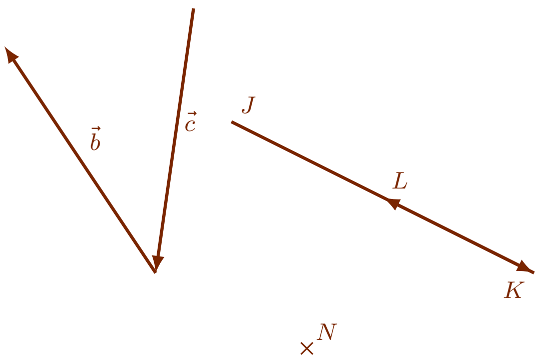
Exercices 42 à 46 page 187 du manuel Lelivrescolaire : dessiner des sommes.

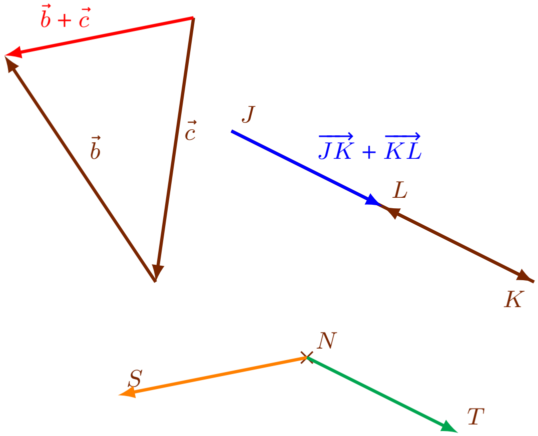
Correction de l'exercice 29

Exercice 42 page 187.


M
C
$\vec{w}$
$\vec{a}$
B
A


M
C
$\vec{w}$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
$\vec{w} + \vec{a}$
$\vec{a}$
R
B
A


J
$\vec{c}$
$\vec{b}$
L
K
N



Exercice 30.

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Construisez le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
2. Justifiez que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$.
3. F est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$. Justifiez que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FB}$.

Correction de l'exercice 30

1. L'intitulé triangle quelconque suggère qu'il faut éviter de se placer dans un cas particulier mais aussi que la construction doit se faire sans utiliser un quadrillage.
2. Par construction $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ donc $ABDC$ est un parallélogramme. Et par conséquent $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$. Il suffit de faire la figure pour s'en convaincre.
3. Puisque F est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB}$. Nous déduisons de cette dernière égalité que $AFBC$ est un parallélogramme. Enfin, comme $AFBC$ est un parallélogramme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FB}$.

Exercice 31.

Exercice 32.

Exercice 33.

Soit A, B, C et D quatre points quelconques.

1. Démontrer les égalités suivantes.
   (a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{DA}$
   (b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$
2. Simplifier l'écriture des vecteurs suivants.
   (a) $\vec{u}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}\right)$
   (b) $\vec{v}=\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}\right)-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$

Correction de l'exercice 33

1. (a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}\right)&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{DA}.}$$

(b) D'après la relation de Chasles

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\\&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}\vec{u}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\\&=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{0}.}$$

(b)

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$$

D'aprèsla relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{0}.}$$