Géométrie repérée.

I De la géométrie euclidienne classique à la géométrie repérée.

1 La Géométrie antique.

Au collège vous avez étudié la géométrie et l'arithmétique telles que les Grecs les ont inventées et développées.

Une grande partie de ces connaissances sont présentées dans un ouvrage de référence : les *Éléments* de géométrie d'*Euclide* (téléchargeable en pdf et en epub). Nous savons très peu de choses d'Euclide il a vraisemblablement vécu vers 300 avant Jésus Christ dans la grande cité grecque de l'époque qu'était Alexandrie dans l'Égypte ptolémaïque.

Ce livre fut le livre d'apprentissage des mathématiques dans tous l'occident jusqu'au XVII^{e} siècle. Tous les grands mathématiciens jusqu'à cette époque découvrirent les mathématiques en étudiant cet ouvrage.

Au delà des résultats qui y sont exposés et que vous connaissez bien pour les avoir étudiés au collège (parallélisme, angles alternes, somme des angles d'un triangle, triangles semblables, identités remarquables, angles inscrit, tangente, proportion, théorème de Thalès, nombres premiers, PGCD, aires et volumes usuels) ce qui assura la pérennité des *Éléments* c'est la volonté de l'auteur de démontrer ces résultats. Son influence fut considérable dans le développement de la logique et de l'axiomatique (résultats qui ne peuvent être démontrés et doivent donc être admis) des mathématiques. Nous retrouverons dans nos cours cette volonté d'admettre un minimum d'axiomes et de démontrer si possible tous les résultats que nous rencontrerons.

Malheureusement les élèves ne retiennent bien souvent qu'une collection de résultats sans percevoir la cohérence de l'ensemble.

Il nous restent quelques résultats de cet ouvrage à étudier. En classe de seconde nous verrons l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et le fait qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Pendant près de deux mille ans ce fut l'ouvrage de référence.

2 La géométrie analytique.

Dans la géométrie euclidienne le nombre est un outil de la géométrie : il représente une longueur, une aire ou un volume. Les mathématiques prirent un virage décisif lorsqu'un mathématicien, Descartes, eut l'idée de ramener l'étude de la géométrie à des calculs sur les nombres de façon systématique. Que l'on songe aux théorèmes de Pythagore et Thalès : leur succès vient précisément du lien qu'ils permettent entre perpendicularité et parallélisme d'une part et calculs sur de longueurs d'autre part.

Cette nouvelle façon de traiter la géométrie qui fut vite utilisée par Fermat est appelée *géométrie analytique*. Le titre de cette leçon, *Géométrie repérée*, doit être compris comme une paraphrase de cette expression.

L'idée d'associer systématiquement la position d'un objet géométrique à un couple de nombres est due à René Descartes ($XVII^{\text{ième}}$). Il fut un grand mathématicien mais la postérité a surtout retenu le philosophe dont les méthodes de réflexion exposées dans son *Discours de la méthode* (pdf, epub) sont inspirées de celles des mathématiques.

Les principes de réflexion suivants notamment sont bien connus.

« Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle : c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention ; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de pour celles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusques à la connaissance des plus composés ; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.

Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre. »

C'est pour rendre hommage à ce grand mathématicien qu'on parle de *repère cartésien* (par opposition à d'autres systèmes de coordonnées : polaires, cylindriques, sphériques).

Pour vous occuper au prochain confinement (ou cyclone, ou en remplacement du feuilleton à la mode).

- *Éléments*. L'ouvrage d'*Euclide*, auxquels tous les grands mathématiciens se sont frottés dont je vous recommande la lecture pour la démarche logique et pour s'amuser à retrouver les résultats de géométrie que vous connaissez déjà mais formulés de façon inhabituelle : pdf et en epub.
- *Discours de la méthode* de *Descartes*. Celui-ci est plus un ouvrage de philosophie mais il est fondateur (en prévision de la terminale peut être) : pdf, epub.

Dans cette leçon nous allons voir deux techniques géométriques utilisant les coordonnées : calculer une longueur et trouver les coordonnées du milieu d'un segment.

Vous verrez qu'avec ces deux seuls résultats nous serons capables de démontrer de nombreux résultats usuels.

II Des révisions de géométrie : quadrilatères, triangles et cercles.

Nous utiliserons cette année vos connaissances antérieures de géométrie. Notamment sur les

- quadrilatères, (pdf) ,
- triangles, (pdf),
- cercles, (pdf).
- quadrilatères, (pdf) (pdf correction),
- triangles, (pdf) (pdf correction),
- cercles, (pdf) (pdf correction).

III Repère.

Un repère est une façon de donner des indication numériques sur la position d'un objet géométrique dans le plan.

Il existe d'autres repère, notamment le repérage avec les coordonnées polaires qui est plus adapté pour décrire des trajectoires circulaires.

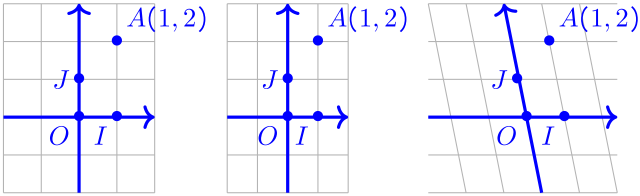
Définition 1

Nous appellerons *repère cartésien du plan* la donnée, dans cet ordre, de trois points O, I et J du plan euclidien non alignés et distincts deux à deux. Nous le noterons (O, I, J).

(i) Le repère (O, I, J) est dit *orthogonal* lorsque le triangle OIJ est rectangle en O.

(ii) Le repère (O, I, J) est dit *orthonormal*, ou *orthonormé*, lorsque le triangle OIJ est isocèle rectangle en O.

Exemples.

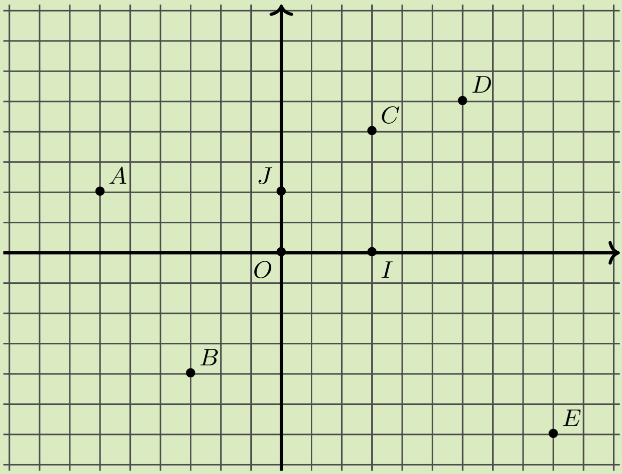


Remarques.

1. On pourrait ajouter un nouveau point K et considérer le repère (O, I, J, K) pour passer d'un espace à deux dimensions à un espace à trois dimensions.
2. Dans un couple de coordonnées la première coordonnée est (toujours) l'*abscisse* et la seconde l'*ordonnée*.
3. Nous noterons $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ l'*axe des abscisses* *i.e.* la droite (OI) orientée de O vers I.
   De même nous noterons $\left(O, \overrightarrow{j}\right)$ l'*axe des ordonnées* *i.e.* la droite (OJ) orientée de O ver J.
   Les notations $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ seront expliquées dans une autre leçon.

Exercice 1.

Dans le repère (O, I, J) ci-dessous



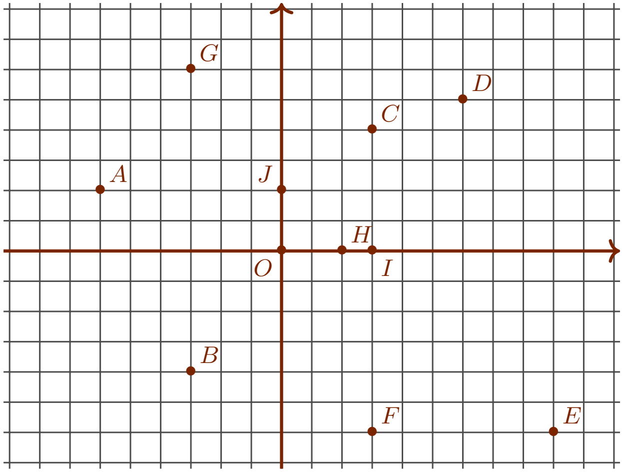
1. déterminez les coordonnées des points A, B, C, D et E ;
2. placez les points
   a) $F(1;-2)$, b) $G(-1;3)$, c) $H\left(\frac{2}{3};0\right)$.

Correction de l'exercice 1

1. Il faut être vigilant : ici le repère n'est pas orthonormé mais simplement orthogonal. Une unité sur l'axe des abscisses correspond à 3 carreaux et une unité sur l'axe des ordonnées correspond à 2 carreaux.

   $A(-2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(1;2)$, $D(2;2,5)$ et $E(3;-3)$.

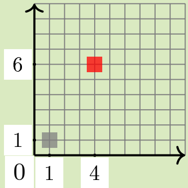
2.



h

Exercice 2.

L'affichage sur un moniteur (écran) est constitué de pixels, *i.e.* de tout petits carrés illuminés d'une seule couleur à la fois.
Il est possible de repérer chaque pixel par ses coordonnées.



Lors de la création d'un jeu vidéo l'affichage d'un personnage sera centré sur un pixel.

Afin de déplacer le personnage (ici le lutin sous Scratch) vers la droite ou vers la gauche le programme suivant est créé.
Le lutin apparaît au pixel de coordonnées $(0, 0)$.

1. Donnez les abscisses et ordonnées du lutin si l'utilisateur appuie sur la touche « bas ».
2. Donnez les abscisses et ordonnées du lutin si l'utilisateur appuie successivement sur la touche « bas », la touche « gauche », la touche « bas » et à nouveau la touche « bas ».
3. Proposez un enchaînement de touches sur lesquelles appuyer afin que le lutin se retrouve au point de coordonnées $(-90, 30)$.
4. Expliquez pourquoi il est impossible que le lutin se retrouve au point de coordonnées $(25, -60)$.
5. Quelle transformation du plan est appliquée au lutin lorsqu'une instruction  est réalisée ?

Correction de l'exercice 2

En algorithmique , pour l'instant , les réponses sont relativement peu argumentée. l'essentiel est de lire est comprendre le fonctionnement et le rôle de l'algorithme.

1. Si l'utilisateur appuie sur la touche bas le lutin voit ses coordonnées modifiées (donc

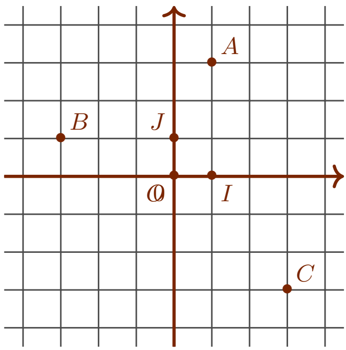
il se déplace) la variable y qui représente son ordonnée est diminuée de 10 donc ses nouvelles coordonnées sont $(0; -10)$.

2. Puisqu'on appuie 3 fois sur « bas » et 1 fois sur « gauche » ses nouvelles coordonnées (en partant de l'origine du repère) sont $(-30; -10)$.
3. $-90 = 9 \times (-10)$ donc il a fallu se déplacer 9 fois vers la gauche. Puisque $30 = 3 \times 10$ il a fallu se déplacer 3 fois vers le haut.
4. 25 n'est pas un multiple de 10 il est donc impossible qu'un déplacement conduise à cette position.
5. Le lutin n'est tourné (rotation), il n'est pas retourné (symétrie axiale), il n'est ni agrandi ni réduit par conséquent il s'agit d'une translation.

Exercice 3. ⚽

Tracez un repère orthonormé (O, I, J) (1 cm ou un carreau pour unité) puis placez les points : $A(1; 3)$, $B(-3; 1)$ et $C(3, -3)$.

Correction de l'exercice 3



IV Distance.

Définition 2

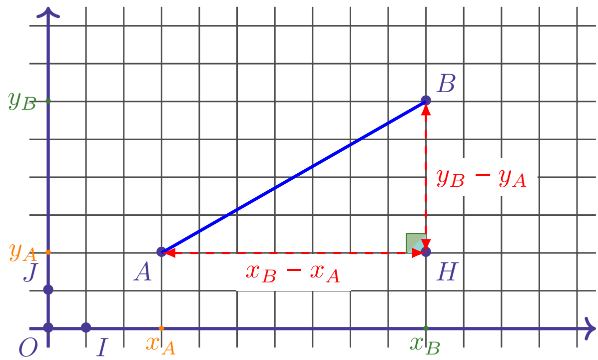
Dans un repère (O, I, J) orthonormé sont placés deux points A et B dont les coordonnées sont respectivement $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.

La distance (euclidienne affine) de A à B est définie par

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Remarques.

1. Cette formule permet de calculer (les distances donc) les longueurs en géométrie repérée. Elle sera donc utiliser avec des résultats utilisant les longueurs : théorème de Thalès, théorème de Pythagore, calculs d'aires.
2. Cette définition n'est valable que pour les repères orthonormés. Ce peut être un indice dans les exercices.
3. Cette formule se généralise en trois dimensions comme vous le verrez en terminale.
4. Cette formule est également appelée formule de la *moyenne géométrique*.
5. Cette formule est ici introduite comme une définition cependant il est possible de faire le lien avec la géométrie classique et les distance sur les axes gradués grâce au théorème de Pythagore :



Exercice 4.

Les points $N(1;1)$, $P(-2;-1)$ et $Q(3;-2)$ sont placés dans un repère orthonormé du plan.
Démontrez que le triangle NPQ est isocèle en N.

Correction de l'exercice 4

NPQ est isocèle en N si et seulement si $NP = NQ$.

Calculons NP et NQ.

Le repère est orthonormé donc

$$\begin{aligned} NP &= \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(1-(-2))^2 + (1-(-1))^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} NQ &= \sqrt{(x_N - x_Q)^2 + (y_N - y_Q)^2} \\ &= \sqrt{(1-3)^2 + (1-(-2))^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

Donc $NP = NQ$ et

$$\boxed{NPQ \text{ est isocèle en } N.}$$

Exercice 5.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), les points $K(-1;7)$, $L(-1;4)$ et $M(3;4)$ sont choisis.
Démontrez que le triangle KLM est rectangle en L.

Correction de l'exercice 5

Démontrons que KLM est rectangle en L.

Nous allons utiliser la réciproque du théorème de Pythagore, en calculant les longueurs des différents côtés.

Puisque le repère est orthonormé

$$\begin{aligned} KL &= \sqrt{(x_K - x_L)^2 + (y_K - y_L)^2} \\ &= \sqrt{(-1-(-1))^2 + ((7-4)^2)^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} LM &= 4 \\ MK &= 5 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{cases} KL^2 + LM^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \\ MK^2 = 5^2 = 25 \end{cases}$$

par transitivité : $KL^2 + LM^2 = MK^2$.

Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore,

$$\boxed{KLM \text{ est rectangle en } L.}$$

Exercice 6.

Rédigez un programme en Python ou en Scratch qui détermine la longueur AB en fonction des coordonnées des points A et B dans un repère orthonormé.

Correction de l'exercice 6

Voici une fonction en Python qui calcul la longueur AB lorsque $A(x;y)$ et $B(u;v)$.

```
from math import *
def dis(x,y,u,v):
    print("AB=",sqrt((x-u)**2+(y-v)**2))
```

V Coordonnées du milieu d'un segment.

Proposition 1

Dans un repère (quelconque) (O, I, J) sont placés deux points A et B dont les coordonnées sont respectivement $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.

Les coordonnées du milieu M de $[AB]$ sont

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2} \ ; \ \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Exercice 7.

Soient $R(2;5)$ et $S(-256;-1002)$ deux points du plan qu'on a muni d'un repère (O, I, J). Déterminez précisément le point d'intersection du segment $[RS]$ et de sa médiatrice.

Correction de l'exercice 7

Le point d'intersection de $[RS]$ et de sa médiatrice est le milieu M de $[RS]$.

Déterminons les coordonnées de M.

Puisque M est le milieu de $[RS]$:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_R + x_S}{2} \\ &= \frac{2 + (-256)}{2} \\ &= -127 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_R + y_S}{2} \\ &= \frac{5 + (-1002)}{2} \\ &= -\frac{997}{2} \end{aligned}$$

$$M\left(-157; -\frac{997}{2}\right).$$

Exercice 8. ⚽

Soient $A(6;5)$ et $S(2;3)$ deux points d'un repère (O, I, J).
Déterminez les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à S.

Correction de l'exercice 8

A' est le symétrique de A par rapport à S si et seulement si S est le milieu de $[AA']$.

Déterminons les coordonnées de A'.

Puisque S est milieu de $[AA']$ nous devons avoir :

$$x_S = \frac{x_A + x_{A'}}{2}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{6 + x_{A'}}{2} \\ 2 \times 2 &= \frac{6 + x_{A'}}{2} \times 2 \\ 4 &= 6 + x_{A'} \\ 4 - 6 &= 6 + x_{A'} - 6 \\ -2 &= x_{A'} \end{aligned}$$

De même, en travaillant avec les ordonnées, nous obtenons $y_{A'} = 1$.
Enfin :

$$A'(-2; 1).$$

Exercice 9. ⚽

Rédigez un programme en Python qui donne les coordonnées du milieu d'un segment dont les coordonnées des extrémités sont connues.

VI Exercices

Exercice 10.

Les points $A(1;2)$, $B(-16;-15)$ et $C(-5;-26)$ sont placés dans un repère orthonormé (O,I,J).

Démontrez que le triangle ABC est rectangle.

Correction de l'exercice 10

L'exercice est tout à fait semblable à l'exercice 5. la seule différence est que nous ignorons a priori en quel sommet il est rectangle. Pour identifier aisément ce sommet nous pouvons nous souvenir que l'hypoténuse est le plus grand coté d'un triangle rectangle. Le triangle est ici rectangle en B.

Exercice 11.

Un repère orthonormé (O,I,J) du plan étant choisi, dîtes si le triangle ABC est rectangle en A dans les cas suivants :

1. $A(2;-1)$, $B(-2;1)$ et $C(1;-3)$.
2. $A(-2;-3)$, $B(3;-2)$ et $C(-4;3)$.
3. $A(-1;2)$, $B(-3;6)$ et $c(-7;1)$.
4. $A(1;3)$, $B(5;1)$ et $C(-1;-1)$.
5. $A(1;5)$, $B(-1;-1)$ et $C(6;3)$.
6. $A(-1;4)$, $B(-2;3)$ et $C(2;1)$.

Correction de l'exercice 11

Le côté répétitif nous incite à utiliser un programme.

```
xA=-1
yA=4
xB=-2
yB=-3
xC=2
yC=1
if (xA-xB)**2+(yA-yB)**2+(xA-xC)**2+(yA-yC)**2==(xC-xB)**2+(
    yC-yB)**2:
    print("ok")
else:
    print("nan")
```

1. Oui.
2. Non.
3. Non.
4. Oui.
5. Non.
6. Oui.

Exercice 12. ☢

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. On construit un triangle PAT dont les sommets ont pour coordonnées respectives $(-2; 4)$, $(0; -1)$ et $(5; -2)$. Le point E est le milieu du segment $[AT]$. La parallèle à (TP) passant par E coupe (PA) en F.
Quelles sont les coordonnées de F ?

Exercice 13. ☣

Soit x un nombre réel.
Nous appellerons *valeur absolue de x* le nombre $\sqrt{x^2}$ et nous le noterons $|x|$.

1. Calculez $|3|$, $|10|$ et $|\pi|$.
2. Dites si la phrase suivante est vraie ou fausse en justifiant : « quelque soit le nombre réel x, $|x| = x$ ».
3. Calculez sans aucune justification $|-2|$, $|1,2|$, $\left|\frac{-1}{3}\right|$ et $|-1+\pi|$.