Projection orthogonale.

I Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Définition 1

Soient M un point et Δ une droite du plan euclidien.

On appelle *projeté orthogonal de M sur Δ* le point d'intersection de Δ et de la perpendiculaire à Δ passant par M.

Remarques.

1. L'utilisation de l'article défini « le » sous-entend l'unicité ce que nous n'avons pas démontré mais que nous admettrons.
2. Si $M \in \Delta$ alors M est son propre projeté orthogonale sur Δ.
3. Nous verrons l'année prochaine une définition vectorielle de cette projection orthogonale.

Exemples.

1. Dans un triangle ABC le pied de la hauteur issue de A est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.
2. Dans un repère orthogonal les abscisses et ordonnées d'un point M s'obtiennent en considérant le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et celui des ordonnées respectivement.
3. Le point d'intersection d'un cercle et de l'une de ses tangente est le projeté orthogonal du centre du cercle sur cette tangente.

Exercice 1. ⚽

Soients A, B et C trois points du plan.

1. Dessinez les projetés orthogonaux, respectivement, A' de A sur (BC), B' de B sur (AC) et C' de C sur (AB).
2. Que remarquez-vous à propos des droites (AA'), (BB') et (CC') ?

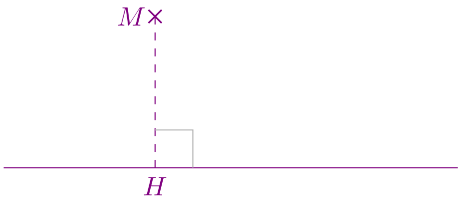
Correction de l'exercice 1

1.
2. La droite (AA') est la hauteur du triangle ABC issue de A. De même pour (BB') et (CC'). Elles sont concourantes en un seul point appelés le centre de gravité du triangle.

Proposition 1

Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M.

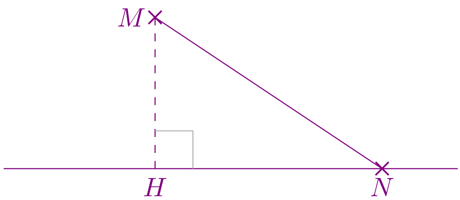
Démonstration



Pour montrer que H est le point le plus proche, nous allons démontrer que tous le autres points de la droite sont plus loin de M que H.

Il s'agit de démontrer une propriété universelle (« pour tout », « quelque soit »), nous commençons donc la rédaction par :

Soit N un point de Δ.



Démontrons que $MN \geqslant MH$.

Il est naturel de penser ici à l'inégalité triangulaire puisque nous souhaitons comparer des longueurs de côtés de triangles. Cependant le résultat à démontrer fait à appel à la notion de projeté orthogonal donc d'angle droit. Il faut donc faire appel à un résultat sur les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

MNH est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$MN^2 = MH^2 + HN^2$$

Les nombres considérés étant tous positifs on en déduit :

$$MN^2 \geqslant MH^2$$

Si le résultat peut sembler naturel dès cette étape il faut en fait détailler comme suit :

$$
\begin{aligned}
MN^2 - MH^2 &\geqslant 0 \\
(MN - MH)(MN + MH) &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Puisque $MN + MH \geqslant 0$:

$$
\begin{aligned}
MN - MH &\geqslant 0 \\
MN &\geqslant MH
\end{aligned}
$$

Nous avons démontré que, quelque soit le point N choisi sur Δ, $MN \geqslant MH$. Autrement dit

> H est le point de Δ le plus proche de M.

■

Remarques.

1. Ce résultat permet de définir la *distance d'un point à une droite* comme étant la distance séparant ce point de son projeté orthogonal sur la droite. Ce qui donne furieusement envie de définir la distance entre un point et une parabole, un point et un cercle, une droite et une autre droite, ...

Exercice 2. ⚽

Montrez que tout point d'une bissectrice d'un angle est équidistant aux demi-droites formant l'angle.

Exercice 3. ☯

II Exercices

Exercice 4.

Soient A, B et C trois points alignés, distincts deux à deux. Si on note A', B' et C' leurs projetés orthogonaux respectifs sur une droite Δ, non perpendiculaire à la droite (AB) alors :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

Exercice 5.

ABC est un triangle isocèle en A tel que l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.
Le cercle de diamètre $[AB]$ coupe le segment $[AC]$ en B'.

1. Faites ne figure et justifiez que le point B' est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).
2. On note C' le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Justifiez que $AC' = AB'$.
3. pourquoi a-t-on $BB' = CC'$.

Exercice 6.

ABC est un triangle équilatéral, H est le projeté orthogonale du point C sur la droite (AB) et K est le projeté orthogonale du point H sur la droite (BC). Faites une figure et comparez les longueurs CH et HK.

Exercice 7.

1. Dessinez le triangle isocèle EFG tel que $EF = 9$, $FG = 6$ et $GE = 9$.
2. Notons P le projeté orthogonal de E sur (GF) et R celui de P sur (EG).
   Dessinez les points P et R.
3. Comparez les longueurs EP et PR.

Exercice 8.

Soient ABC un triangle, I, J et K les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$, H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Faites une figure et indiquez quelle semble être la nature du quadrilatère $BIKJ$.
2. Prouvez que $HIKJ$ est un trapèze isocèle.

Exercice 9.

1.