Théorème de Pythagore.

Médiane et cercle circonscrit.

Proposition 1. Dans un triangle rectangle la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est la moitié de la moitié de l'hypoténuse.

Réciproquement : si dans un triangle la médiane relative à un côté a une longueur qui est la moitié de la longueur de ce côté alors les triangle est rectangle.

Exemples.

1. Si ABC est rectangle en A et si O est le milieu de $[BC]$ alors $AO = \frac{BC}{2}$.
2. Si O est le milieu de $[BC]$ et si $OA = \frac{BC}{2}$ alors ABC est rectangle en A.

Définition 1. Soit A, B et C des points du plan. On appelle *cercle circonscrit au triangle* ABC tout cercle passant par les points A, B et C.

Proposition 2. Si A, B et C sont droit points non alignés du plan, alors il existe un unique cercle circonscrit à ABC.

Proposition 3. Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse.

Si le point C appartient au cercle de diamètre $[AB]$ alors ABC est rectangle en C.

Exemples.

1. Si ABC est rectangle en A alors $[BC]$ est un diamètre du cercle circonscrit à ABC.
2.

Remarques.

1. Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour cente le milieu de l'hypoténuse et pour rayon la moitié de la longueur de l'hypoténuse.
2. Sachant que $[AB]$ est un diamètre d'un cercle $\mathscr{C}$ et que C appartient à$\mathscr{C}$ on peut affirmer que ABC est rectangle en C.

EXERCICE 1. Soient ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. Tracez la médiane $[AI]$ et la hauteur $[CH]$. Démontrez que le triangle BHI est isocèle.

EXERCICE 2. Deux cercles de centre O et O' se coupent en E et F. Soient R le symétrique de E par rapport à O et A le symétrique de E par rapport à O'. Montrez que les points R, F et A sont alignés.

EXERCICE 3. Soient P, A et U trois points alignés. Une droite passant par A coupe le cercle de diamètre $[PA]$ en I et le cercle de diamètre $[AU]$ en T. Démontrez que $(PI) \parallel (UT)$.

Propriété de Pythagore.

Proposition 4. Dans un triangle rectangle le carré de la longueur de l'hypoténuse égale la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Exemples.

1. Ainsi, sachant que ABC et rectangle en A on peut affirmer que $AB^{+}AC^2 = BC^2$.

Remarques.

1. Ce résultat est appelé *le théorème de Pythagore*.
2. On utilise souvent le théorème de Pythagore pour calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant les longueurs des deux autres côtés.
3. On peut également utiliser la contraposée de cette propriété. Si $AC^2 + AB^2 \neq BC^2$ alors ABC n'est pas rectangle en A.

   Cette contraposé ne dit pas ce qu'il en est des autres sommets B et C.

Proposition 5. Si dans un triangle ABC on a la relation $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC est rectangle en A.

Exemples.

1. Si ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$ alors $AB^2 + AC^2 = 25$ et $BC^2 = 25$ donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Nous en déduisons avec la réciproque du théorème de Pythagore que ABC est rectangle en A.

Remarques.

1. Ce résultat est appelé *la réciproque de la propriété de Pythagore*.
2. C'est un outil pour démontrer qu'un triangle est rectangle.

EXERCICE 4. Calculez une valeur approchée au centième par excès du rayon du cercle circonscrit à un carré de côté 9 m.
EXERCICE 5. Calculez le périmètre d'un losange dont les diagonales mesurent 16 cm et 3 cm.
EXERCICE 6. Calculez la longueur d'un rectangle dont la largeur mesure 6,89 m et la diagonale 14,89 m.
EXERCICE 7. ARC est un triangle rectangle en A tel que $CR = 53$ et $AC = 45$. Calculez une valeur approchée au dixième des longueurs des trois médianes du triangle.

Distance d'un point à une droite.

Définition 2. Soient M un point et Δ une droite du plan euclidien. On appelle *projeté orthogonal de M sur Δ* le point d'intersection de Δ et de la perpendiculaire à Δ passant par M.
Remarques.

1. L'utilisation de l'article défini « le » sous-entend l'unicité ce que nous n'avons pas démontré mais que nous admettrons.
2. Si $M \in \Delta$ alors M est son propre projeté orthogonale sur Δ.
3. Nous verrons l'année prochaine une définition vectorielle de cette projection orthogonale.

Exemples.

1. Dans un triangle ABC le pied de la hauteur issue de A est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.
2. Dans un repère orthogonal les abscisses et ordonnées d'un point M s'obtiennent en considérant le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et celui des ordonnées respectivement.
3. Le point d'intersection d'un cercle et de l'une de ses tangente est le projeté orthogonal du centre du cercle sur cette tangente.

EXERCICE 8. Soient A, B et C trois points du plan.

1. Après avoir placé les points A, B et C dans un repère, dessinez les projetés orthogonaux, respectivement, A' de A sur (BC), B' de B sur (AC) et C' de C sur (AB).
2. Que remarquez-vous à propos des droites (AA'), (BB') et (CC') ?

Exercice 8.

1.
2. La droite (AA') est la hauteur du triangle ABC issue de A. De même pour (BB') et (CC'). Elles sont concourantes en un seul point appelés le centre de gravité du triangle.

Proposition 6. L'hypoténuse est le plus long côté d'un triangle rectangle.
Démonstration. Soit ABC un triangle, non trivial, rectangle en A.
ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Les nombres considérés étant tous positifs on en déduit :

$$BC^2 \geqslant AB^2$$

Si le résultat peut sembler naturel dès cette étape il faut en fait détailler comme suit :

$$\begin{aligned} BC^2 - AB^2 &\geqslant 0 \\ (BC - AB)(BC + AB) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Puisque $BC + AB \geqslant 0$:

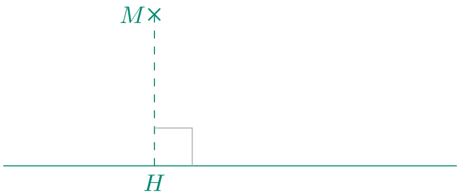
$$\begin{aligned} BC - AB &\geqslant 0 \\ BC &\geqslant AB \end{aligned}$$

De la même façon on démontrerait $BC \geqslant AC$.

Ainsi $[BC]$ est le plus long côté de ABC.

Proposition 7. Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M.

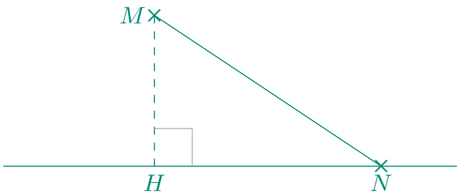
Démonstration.



Pour montrer que H est le point le plus proche, nous allons démontrer que tous le autres points de la droite sont plus loin de M que H.

Il s'agit de démontrer une propriété universelle (« pour tout », « quelque soit »), nous commençons donc la rédaction par :

Soit N un point de Δ.



Démontrons que $MN \geqslant MH$.

MNH est un triangle rectangle en H donc, d'après le précédent lemme, $MH \leqslant MN$.

Nous avons démontré que, quelque soit le point N choisi sur Δ, $MN \geqslant MH$. Autrement dit

H est le point de Δ le plus proche de M.

Remarques.

1. Ce résultat permet de définir la *distance d'un point à une droite* comme étant la distance séparant ce point de son projeté orthogonal sur la droite. Ce qui donne furieusement envie de définir la distance entre un point et une parabole, un point et un cercle, une droite et une autre droite, ...

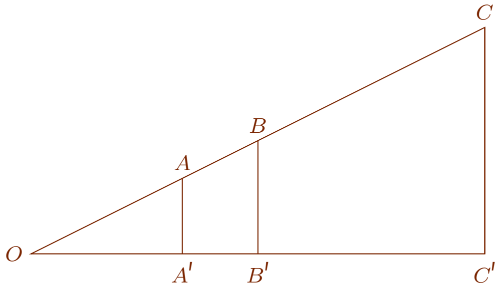
EXERCICE 9. Montrez que tout point d'une bissectrice d'un angle est équidistant aux demi-droites formant l'angle.

Exercice 9. Avec la trigonométrie : même tangente. Si la tangente n'est pas vu la démarche est plus longue et utilise à la fois le cosinus et le sinus.

EXERCICE 10. *Démontrez le résultat suivant.* Soient A, B et C trois points alignés, distincts deux à deux. Si on note A', B' et C' leurs projetés orthogonaux respectifs sur une droite Δ, non perpendiculaire à la droite (AB) alors : $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

Exercice 10.

* Cas non parallèles : théorème de Thalès.
  Puisque Δ et (AB) ne sont pas parallèles elles sont sécantes. Notons O leur point d'intersection.
  La formule à démontrer relève d'une généralisation du théorème de Thalès. Démontrons le résultat dans le cas particulier de la figure ci-dessous.



  Les points O, A, B d'une part et O , A', B' d'autre part sont alignés dans cet ordre donc nous avons une configuration de Thalès.
  De plus, de $(AA') \perp \Delta$ et $(BB') \perp \Delta$ nous déduisons $(AA') \parallel (BB')$.
  Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \quad (1).$$

  Comme $OB = OA + AB$ de (1), nous déduisons

$$AB = OA \times \frac{OB'}{OA'} - OA$$

  De même on démontrerai :

$$AC = OA \times \frac{OC'}{OA'} - OA$$

  Par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{AB}{AC} &= \frac{OA \times \frac{OB'}{OA'} - OA}{OA \times \frac{OC'}{OA'} - OA} \\ &= \frac{OB' - OA'}{OC' - OA'} \\ &= \frac{A'B'}{A'C'}\end{aligned}$$

* Cas parallèles : rectangles et égalités de longueurs.

EXERCICE 11. ABC est un triangle isocèle en A tel que l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.

Le cercle de diamètre $[AB]$ coupe le segment $[AC]$ en B'.

1. Faites une figure et justifiez que le point B' est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).
2. On note C' le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Justifiez que $AC' = AB'$.
3. Pourquoi a-t-on $BB' = CC'$?

Exercice 11.

1. Cercle circonscrit à $AB'B$ et $[AB]$ diamètre donc $AB'B$ rectangle en B.
2. Réciproque : triangle rectangle donc $[AC]$ diamètre du cercle circonscrit donc par symétrie $AC' = AB'$.
3. Longueurs égales d'après le théorème de Pythagore.

EXERCICE 12. ABC est un triangle équilatéral, H est le projeté orthogonale du point C sur la droite (AB) et K est le projeté orthogonal du point H sur la droite (BC). Faites une figure et comparez les longueurs CH et HK.

Exercice 12. $CH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$.

Égalité d'aires : $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}AB \times \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AB \times HK$ donc $HK = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$.

$$\boxed{HK = \frac{1}{2}CH.}$$

EXERCICE 13.

1. Dessinez le triangle isocèle EFG tel que $EF = 9$, $FG = 6$ et $GE = 9$.
2. Notons P le projeté orthogonal de E sur (GF) et R celui de P sur (EG). Dessinez les points P et R.
3. Comparez les longueurs EP et PR.

EXERCICE 14. Soient ABC un triangle, I, J et K les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$, H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Faites une figure et indiquez quelle semble être la nature du quadrilatère $BIKJ$.
2. Prouvez que $HIKJ$ est un trapèze isocèle.

Exercice 14.

1. $BIKJ$ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles deux à deux d'après le théorème de Thalès (ou le théorème des milieux).
2. Nous déduisons de la question précédente que $HIKJ$ est un trapèze. $HI = \frac{1}{2}AB$ car ABH est rectangle en H et $JK = \frac{1}{2}AB$ d'après le théorème de Thalès donc $HI = JK$.

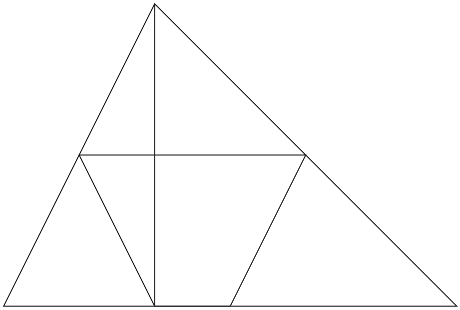
EXERCICE 15.

1.

Exercices

EXERCICE 16.

ABC est un triangle et H est la projection orthogonale de A sur $[BC]$. I, J et K désignent les milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Démontrez que le quadrilatère $JIHK$ a deux côtés parallèles et les autres de même longueur (c'est un trapèze isocèle).



EXERCICE 17. Comment déterminer le centre d'un cercle à l'aide de la seule équerre non graduée et d'un crayon ?

Exercice 17. On trace un rectangle auquel le cercle soit circonscrit puis on détermine son centre qui est aussi celui du cercle.

EXERCICE 18. Soient un cercle $\mathscr{C}$ de rayon 3 cm et de centre P, et un point A tel que $AP = 7$ cm. Tracez le cercle de diamètre $[PA]$ qui coupe $\mathscr{C}$ en U et S.

1. Démontrez que les droites (AU) et (SA) sont tangentes au cercle $\mathscr{C}$.
2. Calculez AU à 1 mm près.

Exercice 18.

1. Le cercle de diamètre $[PA]$ est circonscrit à PSA donc PSA est rectangle en A et donc (AS) est tangente à $\mathscr{C}$.
   Même raisonnement pour (SA).
2. Avec le théorème de Pythagore : $AU = \sqrt{7} - \sqrt{3} \approx 1$ en arrondissant au millimètre.