Représentation paramétrique d'une droite.

Trouver une représentation à partir d'un repère de la droite ou de deux points.

La définition d'une droite se fait avec une équation paramétrique vectorielle. Ainsi la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M su plan tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ où t décrit $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. Soit d la droite passant par le point $A(1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. Dire que $M(x,y) \in d$ équivaut à dire qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. Cette égalité vectorielle se traduit, en considérant les coordonnées, par les égalités $\begin{cases} x-1 = t\times 3 \\ y-2 = t\times 4 \end{cases}$ Autrement dit les coordonnées des points de la droite d s'obtiennent grâce à $\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 4t+2 \end{cases}$ en donnant à t toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. On dit qu'il s'agit d'une représentation paramétrique de la droite d.

Définition 1. Soient (O,I,J) un repère du plan, d une droite du plan, $A(x_A,y_A)$ un point et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un vecteur non nul. Le système $\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ est appelé une *représentation paramétrique* de d. Les valeurs x et y sont les coordonnées d'un point de d.

Exemples.

1. Si $A(-3;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-7\\13\end{pmatrix}$ alors une représentation de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est : $\begin{cases} x = -7t-3 \\ y = 4t+13 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
2. Pour la représentation paramétrique de la droite d donnée par $d : \begin{cases} x = -2t+1 \\ y = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, $(-2t+1,t)$ sont les coordonnées d'un points de d. Ainsi aux valeurs 1, -1, 2 et 0 de t sont associés les points de coordonnées respectives : $(-1,1)$, $(3,-1)$, $(-3,2)$ et $(1,0)$.
3. Le système paramétrique dépend du repère $(A,\vec{u})$ de d qui a été choisi. Ainsi si $A(1;2)$ et $B(3;5)$ alors $(A,\overrightarrow{AB})$ et $(B,-3\overrightarrow{AB})$ sont des repères de (AB) et les représentations paramétriques correspondantes sont : $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t+2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -6t+3 \\ y = -9t+5 \end{cases}$.

Remarques.

1. Il n'y a pas unicité de la représentation paramétrique. À chaque repère de la droite correspond une représentation paramétrique.
2. Deux valeurs distinctes de t donnent deux points distincts de la droite. On obtient tous les points de la droite lorsque $t$décrit $\mathbb{R}$.

EXERCICE 1. Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par les points $A(-2;3)$ et $B(1,-1)$.

1. Écrivez un système d'équations paramétriques de $\mathscr{D}$.
2. Quel est le paramètre du point C symétrique de A par rapport à B ? Calculez les coordonnées de C.
3. Écrivez le système d'équations paramétriques de $\mathscr{D}$ correspondant au repère $\left(C,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$.

Trouver une représentation paramétrique à partir d'une équation cartésienne.

Trouver une représentation paramétrique à partir d'une équation cartésienne.

Retrouver une expression géométrique de la droite.

On peut lire directement un point et un vecteur dans la représentation paramétrique.

On peut également avec deux valeurs distinctes du paramètre t obtenir deux points distincts de la droite.

Retrouver une équation cartésienne.

On isole t dans chaque équation et on égale les deux expressions de t ainsi obtenues.

Exercices.