Équations réduites de droites.

Rajouter les cours et exemple étoffés sur la détermination de l'équation réduite par lecture graphique.

Équations réduites (à partir des équations cartésiennes).

Les équations réduites sont des équations cartésiennes simplifiées qui font le lien entre équation cartésienne et fonction affine.

Pour une fonction affine chaque valeur indiquée sur l'axe des abscisses est reliée à une valeur sur l'axe des ordonnées. Les ordonnées, y, s'expriment en fonction des valeurs en abscisses, x.

Autrement dit pour définir un fonction nous devons obtenir une expression de la forme : $y = f(x)$. Nous allons l'obtenir à partir d'une équation cartésienne.

Exemples.

1. Soit $\mathscr{D}$ la droite dont une équation cartésienne dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est $4x + 2y - 14 = 0$.

$$4x + 2y - 14 = 0$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
4x + 2y - 14 - 4x + 14 &= 0 - 4x + 14 \\
2y &= -4X + 14 \\
\frac{2y}{2} &= \frac{-4x + 14}{2} \\
y &= \frac{-4x}{2} + \frac{14}{2} \\
y &= -2x + 7
\end{aligned}$$

2. Soit d la droite dont une équation cartésienne dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est $8y + 32 = 0$.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation cartésienne dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est $3x + 6 = 0$.

Proposition 1. Soient $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan, $\mathscr{D}$ une droite du plan.

(i) Si $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation, dite réduite, de la forme : $x = r$ avec r une constante réelle.

(ii) Si $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $y = mx + p$ avec m et p des constantes réelles.

Démonstration. Considérons une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Nous utiliserons le fait que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et aussi le fait que a et b ne peuvent être simultanément nuls.

On distingue les deux cas.

(i) Premier cas : la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

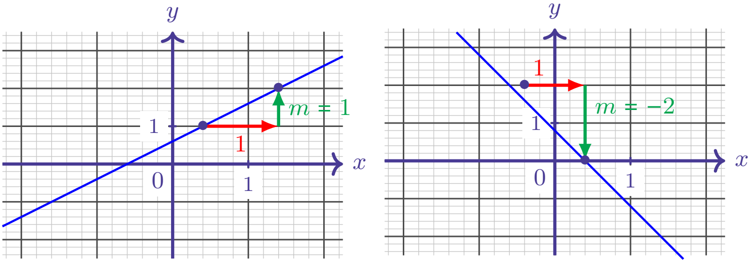
Donc le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{j}$ et par conséquent : $-b = 0$ et $a \neq 0$.

Ainsi l'équation cartésienne de $\mathscr{D}$ se simplifie en $ax + c = 0$. Et puisque $a \neq 0$: $x = \frac{-c}{a}$.

(ii) Second cas : la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
Donc le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{j}$ et nécessairement : $b \neq 0$.
Ainsi l'équation cartésienne de $\mathscr{D}$ peut s'écrire : $y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b}$.

Remarques.

1. Comme $y = mx + p \iff mx - y + p = 0$ nous pouvons affirmer que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation réduite $y = mx + p$. Nous obtenons ainsi une méthode de lecture graphique du coefficient directeur d'une droite.



2. Nous reconnaissons, dans la seconde équation réduite, l'expression d'une fonction affine. m sera encore appelé la pente (ou le coefficient directeur) et p l'ordonnée à l'origine.
3. Les propositions réciproques de celle de la proposition sont également clairement vraies. Nous arions pu écrire cette proposition avec des équivalences.

Pente, alias coefficient directeur.

Proposition 2. Soient $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère d'un plan euclidien, A et B deux points distincts du même plan. Si (AB) admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

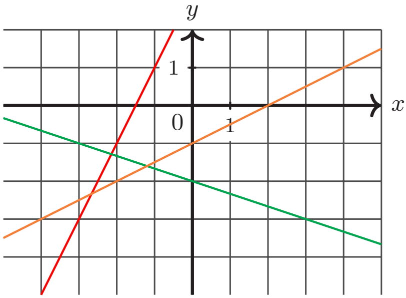
Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} &= \frac{mx_B + p - (mx_A + p)}{x_B - x_A}\\ &= \frac{m(x_B) - x_A}{x_B - x_A}\\ &= m\end{aligned}$$

Remarques.

1. En notant $f : x \mapsto mx + p$ nous remarquons que m est le taux d'accroissement de f entre x_A et x_B (puisque $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$).

EXERCICE 1. Dans le repère ci-dessous sont dessinées des droites.



Déterminez les équations réduites des différentes droites.

Exercice 1.

1. $\mathscr{T}_{-2}$: $y = 2x + 3$.
2. $\mathscr{T}_0$: $y = -\frac{1}{3}x - 2$.
3. $\mathscr{T}_2$: $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Équation réduite, deux points.

Équation réduite, point et vecteurs.

Pente et tangente.

Exercices.

EXERCICE 2. Dans un repère orthonormé (O,I,J) on considère les droites d : $y = -3x + 4$ et d' : $y = \frac{1}{3}x - 1$.

1. Représentez ces deux droites.
2. Que représentent, pour (d) et (d'), les points $P(0;4)$, $P'(0;-1)$ et $A\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$?
3. Déduisez-en que les droites (d) et (d') sont perpendiculaires.

EXERCICE 3. Dans un repère orthonormé (O,I,J) on considère les points $A(-3;-2)$, $B(2;-1)$ et $C(1;4)$.

1. Placez ces points.
2. Déterminez une équation des médianes du triangle ABC issues des sommets A et B.
3. Que représente le point $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ pour le triangle ABC ?
4. Déterminez les coordonnées du point d'intersection des droites (CM) et (AB).
5. Que représente ce point pour le segment $[AB]$?

Exercice 3.

1.
2. Coordonnées du milieu de $[BC]$: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Médiane issue de A : $7x - 9y + 3 = 0$.
   Coordonnées du milieu de $[AC]$: $(-1,1)$. Médiane issue de B : $2x + 3y - 1 = 0$.
3. M est le points d'intersection des deux précédentes médianes donc c'est le centre de gravité du triangle.
4. On peut le faire en résolvant un système ou en raisonnant sur la troisième médiane, celle issue de C.
5. Milieu de $[AB]$.

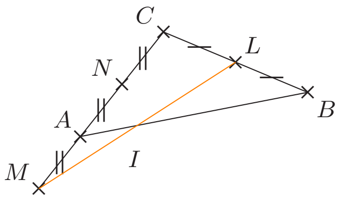
EXERCICE 4. Dans le repère (O,I,J), on considère les points $A(1,2)$, $B(-1,4)$, $C(-2;3)$ et $D(1;m)$.

1. Utilisez un raisonnement par contraposée pour montrer que si les droites (AB) et (CD) sont sécantes alors $m \neq 0$.

2. Utilisez un raisonnement par l'absurde pour montrer que si $m \neq 0$ alors les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
3. Dans cette question, on suppose que $m = -3$. On considère les droites d'équation $y = -x + 3$ et $y = -2x - 1$.

   (a) Associez ces équations aux droites (AB) et (CD).
   (b) En utilisant le point $E(-4;7)$, utiliser un raisonnement par contre-exemple pour montrer que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.
   (c) On considère la droite (d) d'équation $y = x + 1$. Utilisez un raisonnement par disjonction des cas pour montrer que les droites (AB), (CD) et (d) ne sont pas concourantes.

EXERCICE 5. Les données sont codées sur la figure suivante :



On se place dans le repère (A,B,C).

1. Donnez les coordonnées des points A, B et C.
2. Déterminez les coordonnées des points M, N puis L.
3. Donnez une équation de la droite (ML) et en déduire les coordonnées du point I intersection des droites (AB) et (ML). Précisez la position du point I sur le segment $[ML]$.
4. Retrouvez ce résultat par une autre méthode non analytique.

Exercice 5.

1. $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$.
2. $M\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, $N\left(0,\frac{1}{2}\right)$ et $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
3. $(ML):\ y = 2x - \frac{1}{2}$. $(AB):\ y = 0$. Donc intersection : $0 = 2x - 0{,}5 \iff x = 0{,}25$. $I\left(\frac{1}{4},0\right)$.

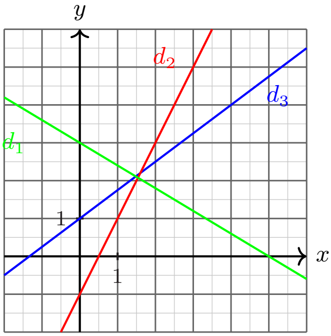
EXERCICE 6. Déterminez la pente de chacune des droites.

a) La droite d d'équation $-8x + 3t + 5 = 0$.
b) La droite (AB) avec $A(-1,-9)$ et $B(2;6)$.

Exercice 6.

a) En isolant y : $y = \frac{8}{3}x - \frac{5}{3}$.
   O avec le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-8\end{pmatrix}$. Donc $m = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$.
b) $\frac{6-(-9)}{2-(-1)} = 5$.

EXERCICE 7. Déterminez la pente de chacune des droites tracées ci-dessous dans un repère.



Exercice 7. $m_1 = -\frac{3}{5}$, $m_2 = 2$ et $m_3 = \frac{3}{4}$.

EXERCICE 8. Donnez, lorsqu'elle existe, la pente de la droite d.

a) $d: y = 3{,}3x + 6{,}5$.
b) $d: y = 2$.
c) $d: y = -7 - x$.
d) $d: y = \frac{4x+1}{5}$.
e) $d: x = -0{,}8$.
f) $d: 4x + 2y + 5 = 0$.

Exercice 8.

a) $m = 3{,}3$.
b) $m = 0$.
c) $m = -1$.
d) $\frac{4}{5}$.
e) Pas de pente.
f) $m = -2$.

EXERCICE 9. Déterminez l'équation de la droite passant par A et de pente m.

a) $A(1, -3)$ et $m = -5$.
b) $A(3; 0)$ et $m = \frac{2}{3}$.
c) $A(2; 3)$ et $m = 0{,}75$.
d) $A(-6, -5)$ et $m = 0$.

EXERCICE 10. Déterminez la pente de (AB) puis son équation réduite.

a) $A(7, -1)$ et $B(0; 2)$.
b) $A(-3; 4)$ et $B(3; 10)$.
c) $A(1, -1)$ et $B(4; 1)$.
d) $A(0, -5)$ et $B(2; -1)$.

EXERCICE 11. Déterminez un vecteur directeur de la droite et, lorsqu'elle existe, la pente de la droite décrite.

a) La droite d d'équation $3x - 2y = 0$.
b) La droite (AB) avec $A(3; 9)$ et $B(2; 4)$.
c) La droite d d'équation $y = -4$.
d) La droite d'équation $x + 5y + 2 = 0$.

EXERCICE 12. Déterminez une équation de la droite d de pente -5 est coupant l'axe des abscisses au point $A(4; 0)$.

EXERCICE 13. On donne le bénéfice d'une entreprise, en million d'euros, entre 2012 et 2017.

Année	Rang de l'année x	Bénéfice y
2012	0	1,23
2013	1	1,38
2014	2	1,62
2015	3	1,70
2016	4	2,02
2017	5	2,31

1. Dans un repère (O,I,J) où $OI = OJ = 2$ construisez le nuage de points de coordonnées (x,y).
2. (a) Calculez $\overline{x}_1$ et $\overline{y}_1$ respectivement la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées des trois premiers points du nuage.
   (b) Placez le point $G_1(\overline{x}_1,\overline{y}_1)$.
3. (a) Calculez $\overline{x}_2$ et $\overline{y}_2$ respectivement la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées des trois derniers points du nuage.
   (b) Placez le point $G_2(\overline{x}_2,\overline{y}_2)$ et tracez la droite (G_1,G_2).
4. On suppose que la droite (G_1G_2) donne l'évolution du bénéfice de l'entreprise.
   (a) Calculez le bénéfice prévisible pour 2020.
   (b) Selon ce modèle, en quelle année le bénéfice devrait-il dépasser quatre millions d'euros ?