# Équations cartésiennes de droites.

## Équations cartésiennes.

Nous appelons équations cartésienne une équation liant les coordonnées d'un objet géométrique dans un repère cartésien du plan (ou de l'espace). Ainsi dans un repère orthonormé du plan le cercle dont le centre est l'origine est le rayon vaut 1 a pour équation $x^2 + y^2 = 1$.

EXERCICE 1. Représentez (avec un outil informatique) graphiquement l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient l'équation :

a) $2x + |y| - 3 = 0$,
b) $\sqrt{x^2} - y + 2 = 0$,
c) $x - |x| + y = 0$,
d) $y = |3x - 2|$,
e) $x + |y - 2| = 0$,
f) $4x^2 - (y + 1)^2 = 0$,
g) $(2x - y + 1)^2 - 4 = 0$,
h) $(x + 1)^2 + (2x - y)^2 = 0$,
i) $(2x - 1)^2 - (y + 2)^2 = 0$,
j) $|x| + |y| = 1$.

## Équations cartésiennes d'une droite.

EXERCICE 2. Soient $A$ et $B$ deux points du plan dont les coordonnées sont données dans un repère du plan. Soit $M(x{,}y)$ un troisième point.

1. Exprimez les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
2. Calculez $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)$.
3. À quelle condition portant sur $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont-ils colinéaires ? Déduisez-en une condition sur $x$ et $y$.
4. Si la précédente condition est vérifiée que peut-on dire des points $A$, $B$ et $M$ ?

**Proposition 1.** Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan euclidien.

(i) Pour toute droite $\mathscr{D}$ il existe des réels $a$, $b$ et $c$ (avec $a$ et $b$ non simultanément nuls) tels que $\mathscr{D}$ est formée de tous les points $M(x{,}y)$ pour lesquels $x$ et $y$ vérifient l'équation $ax + by + c = 0$.

(ii) Réciproquement étant donné des réels $a$, $b$ et $c$ (avec $a$ et $b$ non simultanément nuls), l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x$ et $y$ vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite.

**Démonstration.**

(i) Soient $A(x_A{,}y_A)$ et $B(x_B{,}y_B)$ deux points distincts de $\mathscr{D}$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{D} &\iff \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0 \\
&\iff (y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y - x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A) = 0
\end{aligned}$$

Donc en posant $a = y_B - y_A$, $b = -(x_B - x_A)$ et $c = -x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A)$ nous obtenons bien que $x$ et $y$ sont solution de l'équation $ax + by + c = 0$.

(ii) Cette démonstration est plus technique et astucieuse. Nous n'en présenterons ici que la trame.

Pour s'assurer que l'équation est celle d'une droite nous devons trouver une droite qui lui corresponde, *i.e.* un point et un vecteur directeur de cette droite.
Pour le point nous choisirons $\left(-\frac{c}{a};0\right)$ si $a \neq 0$ et $\left(0;-\frac{c}{b}\right)$ sinon.

Pour le vecteur directeur nous choisissons $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ (ce choix astucieux s'inspire de la démonstration de (i)).
Il ne reste plus, en faisant comme au (i), qu'à vérifier que l'équation cartésienne obtenue pour ce point et ce vecteur directeur est bien : $ax + by + c = 0$.

Remarques.

1. Une équation cartésienne n'est pas unique : $x + 3y + 1 = 0$ et $2x + 6y + 2 = 0$ sont deux équations cartésiennes d'une même droite, la seconde étant obtenue en multipliant la première par 2.
2. Dans la suite de la leçon nous distinguerons trois types de droites correspondant à deux types d'équations différentes.
3. Le choix du vecteur directeur au (ii) de la démonstration est à retenir : si une droite à une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ alors les vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

EXERCICE 3. Soients $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère cartésien, $A(3;-1)$ un point et $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-102\end{pmatrix}$.

1. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Démontrer que $B\left(0;-\frac{155}{2}\right) \in \mathscr{D}$.

Exercice 3.

1. La méthode de la détermination d'une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur directeur est à connaître.

   Notons $\mathscr{D}$ la droite passant pas $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$.

   Déterminons une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.
   Soit $M(x;y) \in \mathscr{D}$.

   $M \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, ce qui équivaut encore successivement à

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right) &= 0\\
\begin{vmatrix} x_{AM} & x_u \\ y_{AM} & y_u \end{vmatrix} &= 0\\
\begin{vmatrix} x-3 & -4 \\ y-(-1) & -102 \end{vmatrix} &= 0\\
(x-3)\times(-102)-(y+1)\times(-4) &= 0\\
-102x + 4y + 310 &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{D} : \ -102x + 4y + 310 = 0.}$$

2. La méthode pour vérifier qu'un point appartient à une droite dont on connaît une équation est à savoir.

   Vérifions que $B \in \mathscr{D}$.
   $B \in \mathscr{D}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.
   Or

$$
\begin{aligned}
-102x_B + 4y_B + 310 &= -102 \times 0 + 4 \times \left(-\frac{155}{2}\right) + 310 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

donc

$$\boxed{B \in \mathscr{D}.}$$

Nous allons utiliser la remarque faites précédemment : si une droite a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

EXERCICE 4. Déterminez un vecteur directeur de la droite $d$.

a) $d: \ 4x - 3y + 1 = 0.$ b) $d: \ x - 5y + 2 = 0.$ c) $d: \ -x + 2y - 5 = 0.$

Exercice 4.

a) $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Or ici $a = 4$, $b = -3$ et $c = 1$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $d$.

b) Voici une autre façon de déterminer un vecteur directeur d'une droite mais un peu plus lourde. Trouvons deux points distincts $A$ et $B$ de $d$ et alors $\overrightarrow{AB}$ sera un vecteur directeur de $d$. Pour trouver un point choisissons une valeur de $x$ au hasard et cherchons une valeur de $y$ correspondante e sorte que ce soit un point de la droite.
Cherchons (si possible) $A \in d$ de sorte que $x_A = 0$ alors on devrait avoir $x_A - 5y_A + 2 = 0$ et donc $y_A = \frac{2}{5}$. $A\left(0; \frac{2}{5}\right)$ est un point de la droite.
De même si $x_B = 1$ alors $y_B = \frac{3}{5}$ et $B \in d$.
Donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de $d$.

c) $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Or ici $a = -1$, $b = 2$ et $c = -5$ donc $\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $d$.

## Exercices.

EXERCICE 5. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A$ et de vecteurs directeur $\vec{u}$.

a) $A(3; 4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. b) $A(-2; 5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$. c) $A(5; -10)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.
d) $A(0; 4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 5.

a) $\mathscr{D}: \ 2x + y - 10 = 0.$
b) $\mathscr{D}: \ -3x - 6 = 0.$
c) $\mathscr{D}: \ x + 3y + 25 = 0.$
d) $\mathscr{D}: \ x - 5y + 20 = 0.$

EXERCICE 6. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A$ et $B$.

a) $A(2; 1)$ et $B(5; -6)$. b) $A(-3; 0)$ et $B(1; 1)$. c) $A(-1; 7)$ et $B(0; 3)$.
d) $A(6; 8)$ et $B(3; 2)$.

Exercice 6.

a) $-7x - 3x + 17 = 0$. b) $x - 4y + 3 = 0$. c) $-4x - y + 3 = 0$.
d) $6x - 3y - 12 = 0$

EXERCICE 7. Soit $d : 2x - y + 1 = 0$.

1. Déterminez l'ordonnée du point $A$ de $d$ dont l'abscisse est 5.
2. Déterminez l'abscisse du point $B$ de $d$ dont l'ordonnée est 13.
3. Tracez la courbe représentative de $d$ dans un repère orthonormé.

EXERCICE 8. Tracez la courbe représentative de $d$ dans un repère orthonormé dans les cas suivants.

a) $d : 2x + 5y + 1 = 0$. b) $d : -3x + 4y + 1 = 0$.
c) $d : 4x + 1 = 0$. d) $d : 2y - 4 = 0$.

EXERCICE 9. Soient $A(-3; 4)$, $B(2; 1)$ et $C(-1; -3)$.

1. Calculez les coordonnées du point $M$ milieu de $[AC]$.
2. Déduisez-en une équation cartésienne de la médiane issue de $B$ dans $ABC$.

Exercice 9.

1. $M\left(-2; \frac{1}{2}\right)$.
2. $\frac{1}{2}x - 4y + 3 = 0$.

EXERCICE 10. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ parallèle à $(AB)$ et passant par $C$.

a) $A(5; 4)$, $B(-1; 2)$ et $C(4; -3)$. b) $A(-5; -1)$, $B(6; 4)$ et $C(1; 2)$.

Exercice 10. $(AB)$ et $\mathscr{D}$ sont parallèles si et seulement si tout vecteur directeur de l'une est vecteur directeur de l'autre droite.

a) $-2x + 6y + 26 = 0$. b) $5x - 11y + 17 = 0$.

EXERCICE 11. Déterminez une équation cartésienne de la droite $(AB)$ puis vérifiez si $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

a) $A(-2; 4)$, $B(7; 2)$ et $C(11; 1)$. b) $A(-4; -1)$, $B(4; 3)$ et $C(44; 23)$.
c) $A(-26; 20)$, $B(51; 6)$ et $C(30; 10)$. d) $A(20; 18)$, $B(72; 40)$ et $C(124; 62)$.

Exercice 11.

1. $-2x - 9y + 32 = 0$ Non.
2. $-4x + 8y - 8 = 0$. Oui.
3. $14x + 77y - 1176 = 0$. Non.
4.

EXERCICE 12. Dites si les droites $d$ et $d'$ sont strictement parallèles, confondues ou sécantes.

a) $d : 2x - 6y + 5 = 0$ et $d' : x - 3y + 2 = 0$.
b) $d : 4x - 3y + 1 = 0$ et $d' : 5x - 4y + 2 = 0$.
c) $d : 3x + 9y + 2 = 0$ et $d' : 12x + 36y + 8 = 0$.

Exercice 12.

a) Déterminons la position relative de $d$ et $d'$.
La position relative de deux droites (position de l'une par rapport à l'autre) dans la plan (coplanaires) n'admet que deux possibilités qui s'excluent mutuellement :
— les droites sont *sécantes*,
— les droites sont *parallèles* (et en particulier éventuellement confondues).

À ce stade de la leçon pour démontrer le parallélisme nous allons utiliser les vecteurs directeurs.

$\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ donc : $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $d$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $d'$.

Déterminons si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\vec{u};\vec{u}\right) &= \begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}6 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ &= 6\times 1 - 2\times 3\\ &= 0\end{aligned}$$

Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc $d$ et $d'$ sont parallèles.
Deux droites parallèles sont confondues si et seulement si elles ont au moins un point en commun. Or $P\left(0;\frac{5}{6}\right) \in d$ mais $P \notin d'$ donc

$$\boxed{d \text{ et } d' \text{ sont strictement parallèles.}}$$

b)

$\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$. $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right) = -1$. $d \nparallel d'$.

c)

$\vec{u} = \begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}-36\\12\end{pmatrix}$. $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right) = 0$. $d \parallel d'$. $P\left(-\frac{2}{3};0\right) \in d$ et $P \in d'$ donc $d = d'$ (droites confondues).

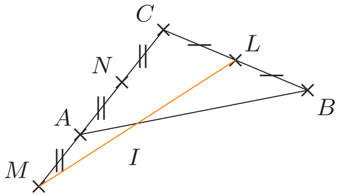
EXERCICE 13. Dans un repère orthonormé $(O,I,J)$ on considère les points $A(-3;-2)$, $B(2;-1)$ et $C(1;4)$.

1. Placez ces points.
2. Déterminez une équation des médianes du triangle $ABC$ issues des sommets $A$ et $B$.
3. Que représente le point $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ pour le triangle $ABC$ ?
4. Déterminez les coordonnées du point d'intersection des droites $(CM)$ et $(AB)$.
5. Que représente ce point pour le segment $[AB]$ ?

Exercice 13.

1.
2. Coordonnées du milieu de $[BC]$ : $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Médiane issue de $A$ : $7x - 9y + 3 = 0$.
   Coordonnées du milieu de $[AC]$ : $(-1{,}1)$. Médiane issue de $B$ : $2x + 3y - 1 = 0$.
3. $M$ est le points d'intersection des deux précédentes médianes donc c'est le centre de gravité du triangle.
4. On peut le faire en résolvant un système ou en raisonnant sur la troisième médiane, celle issue de $C$.
5. Milieu de $[AB]$.

EXERCICE 14. Les données sont codées sur la figure suivante :




On se place dans le repère $(A,B,C)$.

1. Donnez les coordonnées des points $A$, $B$ et $C$.
2. Déterminez les coordonnées des points $M$, $N$ puis $L$.
3. Donnez une équation de la droite $(ML)$ et en déduire les coordonnées du point $I$ intersection des droites $(AB)$ et $(ML)$. Précisez la position du point $I$ sur le segment $[ML]$.
4. Retrouvez ce résultat par une autre méthode non analytique.

Exercice 14.

1. $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$.
2. $M\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, $N\left(0,\frac{1}{2}\right)$ et $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
3. $(ML)$ : $y = 2x - \frac{1}{2}$. $(AB)$ : $y = 0$. Donc intersection : $0 = 2x - 0{,}5 \Leftrightarrow x = 0{,}25$. $I\left(\frac{1}{4},0\right)$.

EXERCICE 15. Déterminez une équation de la droite $\mathscr{D}$ de repère $(A,\vec{u})$, dans les cas suivants :

a) $A(-2;2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ ; b) $A(0;0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ ; c) $A(0,-2)$ et $\vec{u}\,(-1;3)$.

EXERCICE 16. Déterminez une équation de la droite $(A)$ dans les cas suivants :

a) $A(1;3)$ et $B(-1;2)$ ; b) $A(2;0)$ et $B(0,-4)$ ; c) $A(0;0)$ et $B(-2;3)$.

EXERCICE 17.

1. Déterminez une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(-2;3)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(-1;2)$.
2. Les points suivant appartiennent-ils à $\mathscr{D}$ : $B\left(\frac{13}{11},-\frac{37}{11}\right)$, $C\left(-\frac{7}{15},\frac{2}{29}\right)$, $D\left(\sqrt{2},-\frac{2}{\sqrt{2}-1}\right)$ ?
3. Déterminez les point de $\mathscr{D}$ d'abscisse $-\frac{3}{2}$ et le point de $\mathscr{D}$ d'ordonnée $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.
4. Existe-il un point de $\mathscr{D}$ dont l'abscisse est égale à l'ordonnée ?

EXERCICE 18.

1. Construisez la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x - y - 5 = 0$. Déterminez un repère de $\mathscr{D}$ et écrivez une représentation paramétrique vectorielle de $\mathscr{D}$.
2. Même question pour les droites d'équations :

a) $2x + y = 3$ ; b) $2x - 5y + 3 = 0$ ; c) $x + 2 = 0$ ;
d) $y - 3 = 0$ ; e) $3x + 5y = 0$ ; f) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1 = 0$.

EXERCICE 19. Trouvez une équation cartésienne de l'ensemble des points $M$ du plan tels que : $\overrightarrow{OM} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + t(3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath})$, lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$.

EXERCICE 20. Soient $A(3;8)$, $B(2;1)$, $C(8;3)$ et $N(6;5)$.

1. (a) Calculez les coordonnées de $M$ milieu de $[BC]$.
   (b) Montrez que $A$ est équidistant de $B$ et de $C$.
   (c) Que représente la droite $(AM)$ pour le triangle $ABC$ ?

2. (a) Déterminez une équation cartésienne de $(AC)$ ?
   (b) Démontrez que $N$ appartient à la droite $(AC)$
   (c) Montrez que le triangle $BNC$ est rectangle en $N$.
   (d) Que représente la droite $(BN)$ pour le triangle $ABC$ ?
3. (a) Déterminez une équation cartésienne de chacune des droites $(AM)$ et $(BN)$.
   (b) Déterminez les coordonnées de l'orthocentre du triangle $ABC$.