I Barycentre.

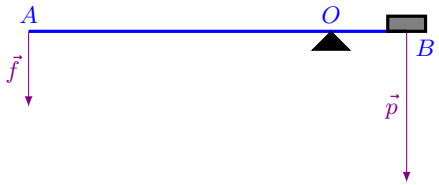
Barycentre de deux points.

Théorème 1. Étant donné deux points A et B et deux réels α et β dont la somme n'est pas nulle, il existe un unique point G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. On dit que G est le *barycentre* des points A et B affectés des coefficients α et β, ou le barycentre des points pondérés $(A,\alpha),(B,\beta)$.

Démonstration. $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ ce qui définit bien G de façon unique. Si $A = B$ alors $A = B = G$ et si $A \neq B$ alors G est le point de (AB) d'abscisse $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ dans le repère (A,B).

Exemples.

1. Le milieu I d'un segment $[AB]$ vérifie $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. I est donc le barycentre des points pondérés $(A,1),(B,1)$. On dit aussi que I est l'*isobarycentre* des points A et B.
2. Les leviers sont des exemples concrets du barycentre. On souhaite soulever une pierre avec un levier. Le poids de la pierre est une force $\vec{p}$. Notons $\vec{f}$ la force exercée par la personne pour maintenir soulevée la pierre. Le levier est mobile autour d'un axe modélisé par un point O.



Comme Archimède nous pouvons constater que pour que l'équilibre soit maintenu il faut que : $\|\vec{f}\|\overrightarrow{OA} + \|\vec{p}\|\overrightarrow{OB} = \vec{0}$. Si $\|\vec{p}\| = 2000$ N et $\|\vec{f}\| = 400$ N alors $400\overrightarrow{OA} + 2000\overrightarrow{OB} = \vec{0}$, autrement dit $\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} = \vec{0}$. L'axe d'appui doit être placé au point O barycentre des points pondérés $(A,1),(B,5)$.

Remarques.

1. Si $\alpha + \beta = 0$ alors on a $0\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB}$. Si $\beta\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ alors aucun point G ne convient. Si $\beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ alors tous les points du plan conviennent pour G.

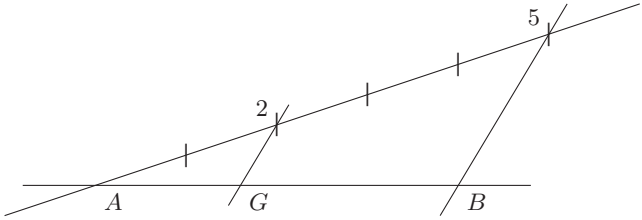
Proposition 1. Soient A et B deux points distincts du plan. Pour α et β des réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$, le barycentre de $(A,\alpha),(B,\beta)$ appartient à la droite (AB). Réciproquement tout point de (AB) est le barycentre des points A et B affectés de certains coefficients.

Démonstration. L'implication directe découle de la preuve du précédente théorème. Réciproquement, considérons un point M de (AB). Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Cette dernière égalité équivaut à $(1-k)\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Or $(1-k) + k \neq 0$ donc M est le barycentre de $(A,1-k),(B,k)$.

Proposition 2. Soient (A,α) et (B,β) des points pondérés avec $\alpha + \beta \neq 0$. Quel que soit le point M du plan : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

EXERCICE 1. Construction géométrique du barycentre de deux points.

1. Soit G le barycentre des points pondérés $(A,3),(B,2)$. démontrez que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et justifiez la construction de G faite ci-dessous.



2. Soit O un point du plan non situé sur la droite (AB).
   (a) Démontrez que $3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB} = 5\overrightarrow{OG}$. Déduisez-en les coordonnées du point G dans le repère $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.
   (b) On considère les points A' et B' définis par $\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$ et le point S quatrième sommet du parallélogramme dont les trois premiers sommets sont A', O et B'. Démontrez que G est le point d'intersection des droites (AB) et (OS).
3. Utilisez les méthodes des questions 1 et 2 pour construire les barycentres des points suivants.
   (a) $(A,3),(B,5)$.
   (b) $(A,-5),(B,2)$.
   (c) $(A,-1),(B,4)$.

EXERCICE 2. Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne les points $A(-1,-2)$ et $B(4;3)$. Calculez les coordonnées du point G barycentre des points pondérés $(A,2),(B,3)$.
EXERCICE 3. Déterminez le barycentre des points pondérés.

a) $(A,1),(B,0)$. b) $(A,0),(B,1)$. c) $\left(A,\frac{3}{7}\right),\left(B,\frac{3}{7}\right)$. d) $(A,-3),(B,0)$.

EXERCICE 4. Soient A et B deux points distincts. Construisez les points C, D, E et F définis par : $\overrightarrow{CA} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$.
EXERCICE 5. On donne A et B deux points distincts. Existe-t-il un point M, et si oui construisez-le, tel que :

a) $-2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
b) $4\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
c) $3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

EXERCICE 6. Soit $\mathscr{D}$ une droite de repère (A,B).

1. Montrez que le point C d'abscisse $\frac{3}{5}$ dans le repère (A,B) est le barycentre des points A et B affectés de coefficients que vous déterminerez.
2. Même question pour le point D d'abscisse $-\frac{5}{3}$.
3. Plus généralement, démontrez que pour tout point M de d'abscisse t dans le repère (A,B) est le barycentre des points A et B affectés de coefficients que vous exprimerez en fonction de t.

EXERCICE 7. On donne deux points distincts A et B. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\|-2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 2MB$.
b) $\|-3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = MB$.

Utilisez le centre de gravité des points A et B avec des pondérations judicieuses.

EXERCICE 8. Soit un triangle ABC. Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\|4\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}\| = MC$.
b) $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\|$.
c) $\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

EXERCICE 9. Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne les points $A(-2;1)$ et $B(3,-4)$. Calculez les coordonnées du barycentre des points pondérés $\left(A,\frac{2}{7}\right),\left(B,-\frac{5}{7}\right)$.

Barycentre de trois points.

Théorème 2. Étant donnés trois points A, B et C et trois réels α, β et γ dont la somme n'est pas nulle, il existe un unique point G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Le point G est appelé *le barycentre* des points pondérés (A,α),(B,β),(C,γ).

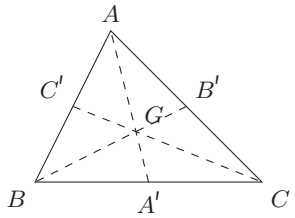
Remarques.

1. Si $\alpha = \beta = \gamma$ on dit que G est l'*isobarycentre*.

Isobarycentre de trois points : centre de gravité d'un triangle.

EXERCICE 10.

1. $[AB]$ est un segment et I est son milieu.
   (a) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$?
   (b) Démontrer que quelque soit le point M choisi,
$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right).$$
2. Soient ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.



   (a) Appliquer la formule établie à la question 1. aux vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.
   (b) Déduisez-en que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.
   (c) On note G le centre de gravité de ABC. Déduisez de la question précédente que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

EXERCICE 11.