Construction géométrique des nombres.

Depuis l'antiquité grecque, et jusque récemment, les mathématiciens étaient appelés des géomètres. Pour devenir ingénieur ou peintre il fallait être d'abord géomètre. Le frontispice de l'école de philosophie de Platon portait l'inscription : « que nul, s'il n'est géomètre, n'entre ici ».

Les grecs raisonnaient de façon géométrique : souvenez-vous de la démonstration géométrique du théorème de Pythagore.

Nous allons voir comment dessiner les nombres à la façon des grecs. Une première façon consiste à associer un nombre à une longueur.

Rappelons d'abord une règle essentielle du géomètre il n'existe que deux instruments :
- la règle non graduée,
- le compas.

Commençons par revoir quelques techniques élémentaires de dessin en construisant divers polygones. Il s'agit d'un problème classique : quels sont les polygones que l'on peut dessiner uniquement avec la règle et le compas ?

Les constructions suivantes sont à faire sur feuille blanche non quadrillée (du moins n'utilisez pas le quadrillage) en laissant apparents et en pointillés les traits de construction.

EXERCICE 1. Nous allons construire un repère du plan.

1. *Choisir une unité de longueur.*
   Pour décrire les figures nous aurons besoin d'indiquer les mesures des côtés. En bons géomètres nous ne pouvons nous contenter de l'arbitraire de la définition du mètre par les physiciens : « la longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide pendant une durée d'un 299 792 458$^{\text{e}}$ de seconde ».
   Chacun sera libre de choisir son unité de mesure.

   Placez deux points distincts O et I sur votre feuille. La distance les séparant représentera une longueur de 1 (donc ne les éloignez pas trop).
2. Tracez la droite (OI).
3. Tracez sur $[OI)$ le point A tel que $OA = 5$.
4. Tracez sur $[IO)$ le point A' tel que $OA' = 5$.
5. Tracez la médiatrice (d) de $[AA']$.
6. Dessinez sur (d) un point J tel que $OJ = 1$.

EXERCICE 2. Nous allons construire différents triangles avec uniquement la règle non graduée et le compas.

Soient O et I deux points distincts du plan. On pose $OI = 1$.

1. Triangles équilatéral et isocèle.
   (a) Dessinez un segment $[AB]$ de longueur 5.
   (b) Dessinez un triangle équilatéral ABC.
   (c) Dessinez un triangle ABD isocèle en D avec $AD = 4$.
2. Un triangle scalène.
   Dessinez un triangle TUV avec $TU = 4$, $UV = 5$ et $VT = 6$.
3. Un triangle rectangle.
   (a) Dessinez deux points E et F distants de 5.
   (b) Dessinez le point G milieu de $[EF]$.
   (c) Dessinez un point H de sorte que EFH soit rectangle en H.
4. Encore un triangle rectangle.

(a) Dessinez deux points K et L distants de 6.

(b) Dessinez un point M de sorte que KLM soit rectangle en K et $KM = 4$.
Vous pourrez introduire le point L' symétrique de L par rapport à K.

Construisons maintenant des quadrilatères.

EXERCICE 3. Placez trois points distincts non alignés M, N et P. Construisez le point Q de sorte que $MNPQ$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 4. Après avoir choisir une unité de longueur en dessinant deux points distincts O et I, dessinez un rectangle $NPQR$ avec $NP = 3$ et $PQ = 5$ à la règle non graduée et au compas.

EXERCICE 5. Soient O et I deux points distincts du plan. On pose $OI = 1$. Construisez un hexagone de côté de longueur 3.

EXERCICE 6.

Construction du pentagone méthode de Ptolémée. Voir le document en annexe.

Nous venons de voir certains polygones constructibles. Plus généralement se pose la question des points qui sont constructibles : quels sont les points de ma feuille que je peux obtenir en faisant des constructions à la règle et au compas en se donnant deux points distincts de référence O et I ?

EXERCICE 7. Soit OIJ un triangle isocèle-rectangle en O.

Vos constructions doivent toujours être faites à la règle non-graduée et au compas.

1. Dessinez des points O, I et J.
2. Tracez les droites (OI) et (OJ).
3. Placez des graduations de 1 en 1 sur (OI) et (OJ) en partant de O.

Nous venons de mettre en évidence un repère orthonormé (O,I,J). De façon général nous dirons que (O,I,J) est un *repère orthonormé* si et seulement si OIJ est un triangle isocèle-rectangle en O.

5. Dessinez les points de coordonnées $(3;4)$, puis $(-2;4)$, puis $(-3;-3)$ et enfin $(4;-3)$.

Nous venons de voir que non seulement nous pouvons dessiner certaines figures géométriques classiques mais aussi tous les points à coordonnées entières dans un repère orthonormé (O,I,J).

EXERCICE 8. *Construction des nombres rationnels.*

EXERCICE 9.

Tours d'extension quadratiques retrouver le document

Ce qu'il faut retenir.

1.