Colinéarité et droites.

Nous allons nous intéresser à la relation qui existe entre un vecteur et le vecteur obtenu en multipliant ce dernier par un nombre quelconque. Cette relation est appelée la colinéarité.

La colinéarité va participer à la définition de la droite. Ce qui va nous conduire à définir le parallélisme et à caractériser l'alignement.

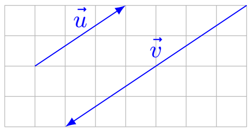
Colinéarité.

Définition 1. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* si et seulement si il existe un nombre réel λ (*i.e.* on peut en trouver au moins un) tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Remarques.

1. Nous pouvons voir la chose comme une sorte de rapport de proportionnalité entre les vecteurs.
2. Il suffit d'établir l'une des deux égalités pour établir la colinéarité de deux vecteurs.
3. Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
4. Soit $\vec{u} \neq \vec{0}$. L'ensemble formé de tous les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ est appelé *une direction*.

Exemples.

1. Si $\vec{u} = 2\vec{v}$ alors $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.
2. 

   Nous remarquons que $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$ donc $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
3. Si $6\vec{u} - 4\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car : $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{v}$.
4. Si deux vecteurs sont égaux alors ils sont colinéaires car $\vec{u} = 1\vec{v}$.
5. $\vec{0}$ est colinéaire à $\vec{u}$ car $\vec{0} = 0\vec{u}$.

Remarques.

1. « être colinéaires à » est une relation d'équivalence :
   — elle est réflexive, $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{u}$,
   — elle est symétrique, si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ alors $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$,
   — elle est transitive, si, d'une part, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, et, d'autre part, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires alors $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

   Nous pourrons utiliser la transitivité dans certaines démonstration.

Définition 2. Soient $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base du plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs dont les coordonnées relativement à la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, sont respectivement $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$. On appelle *déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$*, et on note $\det(\vec{u},\vec{v})$ le nombre $x_u y_v - y_u x_v$ qu'on note aussi $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$.

Exemples.

1. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$ et $\det(\vec{v},\vec{u}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 1 \times 4 = 2.$

Remarques.

1. Le déterminant de la famille de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$ par rapport à la base $(\vec{i},\vec{j})$ devrait se noter $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ mais nous écrirons simplement $\det(\vec{u};\vec{v})$.
2. La notation $\det(\vec{u},\vec{v})$ ne nécessite pas de connaître les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est plus condensée. Au contraire la notation $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ fait intervenir les coordonnées des vecteurs.
3. Comme vu en exemple : $\det(\vec{u},\vec{v}) = -\det(\vec{v},\vec{u})$. On dit que le déterminant est une forme bilinéaire alternée.

Proposition 1. Soient $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base du plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs dont les coordonnées relativement à la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, sont respectivement $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils vérifient l'une au moins des propriétés suivantes.

(i) Il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

(ii) Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles.

(iii) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

Démonstration. Par définition de la colinéarité $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Autrement dit si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ y_2 = \lambda y_1 \end{cases}$$

Autrement dit si et seulement si les coordonnées de $\vec{u}$ sont proportionnelles à celles de $\vec{v}$. Ce qui équivaut à dire que le produit en croix est vérifié.

Autrement dit $x_u \times y_v - x_v \times y_u = 0$.

x_u	x_v
y_u	y_v

Remarques.

1. D'un point de vu pratique nous retiendrons que deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
2. Nous privilégierons, si possible, la recherche du coefficient de proportionnalité entre les coefficients qui nous fournira l'égalité liant les deux vecteurs plutôt que le calcul du déterminant.
3. par contre le déterminant est très efficace pour démontrer que des vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exemples.

1. Déterminons si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \pi^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u},\vec{v}) &= \begin{vmatrix} 1 & \pi^{-1} \\ \pi & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 1 - \pi\pi^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

Nous aurions pu le justifiez plus succinctement : $\pi\vec{v} = \vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Déterminons si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}-2 & 3\\-3 & 4\end{vmatrix} = -2\times 4-(-3)\times 3 = 1 \neq 0.$

$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires.}}$

EXERCICE 1. Montrez que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\8\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 2. Soient $A(-10;7)$, $B(-20;10)$, $C(5;-2)$ et $D(10;-8)$ des points du plan. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 3. Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et si c'est le cas précisez l'égalité les reliant.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-9\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix}$.

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\-\frac{5}{6}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\-15\end{pmatrix}$.

g) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\\sqrt{5}+1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 4. Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\8\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\3\end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 5. Dans chacun des cas suivants dites si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

a) $A(1;-3)$, $B(-4;8)$ et $C(-6;2)$.

b) $A(5;5)$, $B(0;-1)$ et $C(10;11)$.

c) $A(9;1)$, $B(6;-1)$ et $C(3;-3)$.

d) $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{4};-\frac{2}{3}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2};-\frac{11}{3}\right)$.

e) $A\left(-\frac{1}{5};1\right)$, $B\left(2;-\frac{1}{6}\right)$ et $C\left(\frac{10}{5};1\right)$.

EXERCICE 6. Donnez deux vecteurs colinéaires à $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$.

EXERCICE 7. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}$. Calculez le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

EXERCICE 8. Déterminez si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\21\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\21\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}7/4\\2/7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1/2\\4\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}2/3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1/5\\3/5\end{pmatrix}$.

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix}$.

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}3/2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}21\\28\end{pmatrix}$.

EXERCICE 9. Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et si c'est le cas précisez l'égalité les reliant.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$. c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-9\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix}$. e) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. f) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\-\frac{5}{6}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\-15\end{pmatrix}$.

g) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\\sqrt{5}+1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 10. Déterminez un réel μ de sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\mu\\2\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\\mu\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1/3\end{pmatrix}$.

EXERCICE 11. Déterminez tous les nombres x tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\10\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1+x\\2x\end{pmatrix}$.

EXERCICE 12. Soient $A(-10;7)$, $B(-20;10)$, $C(5;-2)$ et $D(10;-8)$ des points du plan. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 13. Soient les points $C(0;4)$, $D(2;7)$, $E(8;17)$ et $F(16;29)$.

1. Montrez que $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
2. $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 14. On considère des points $F(6;4)$ et G d'abscisse 8 des points. Sachant que $\overrightarrow{FG}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ déterminez l'ordonnée de G.

La définition moderne d'une droite.

Définition 3. Soient A et B deux points distincts du plan. Nous noterons (AB), et nous appellerons *droite passant par A et B*, l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Remarques.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ou n'importe quel vecteur qui lui soit colinéaire et non nul est appelé *un vecteur directeur de la droite.*
2. L'ensemble formé de tous les vecteurs colinéaires à l'un des vecteurs directeurs de la droite est appelé *la direction de la droite*. La direction est formée de tous les vecteurs directeurs de la droite et du vecteur nul. Cet ensemble est appelé un espace vectoriel.
3. Une autre formulation : (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$; on parle de *représentation paramétrique vectorielle* de la droite. Si t décrit $\mathbb{R}_+$ on obtient $[AB)$. Si t décrit $\mathbb{R}_-$ on obtient $(AB]$. Si t décrit $[0;1]$ on obtient $[AB]$. On parle de représentations paramétrique (t étant le paramètre).
4. Cette définition décrit un lieu géométrique. De la même façon on peut définir un cercle comme l'ensemble des points équidistants d'un point (le centre du cercle).
5. Ainsi, si $M \in (AB)$, alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$. Autrement dit t est l'abscisse de M dans le repère (A,B). Dans ce repère l'abscisse de A est 0 et celle de B est 1.
6. Pour définir une droite il faut et il suffit que nous en connaissions un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$. Nous avions besoin de deux points et nous avons à nouveau besoin de deux informations.
7. Cette définition de la droite ne dépend pas d'un repère choisi et est donc très générale.

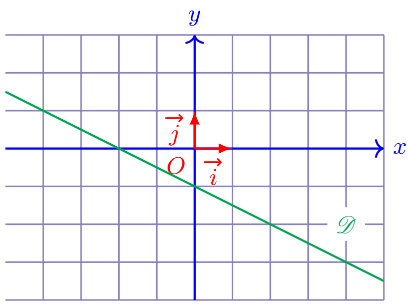
8. Interprétation de la définition en terme de translation : la droite (AB) est l'ensemble des points M images de A par les translations de vecteur $t\overrightarrow{AM}$ où t prend toutes les valeurs possibles dans $\mathbb{R}$.
9. Si une droite passe par A et a pour vecteur directeur $\vec{u}$ alors l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ est aussi un point de la droite.

Tracer une droite connaissant un point et un vecteur directeur.

EXERCICE 15. Après avoir choisi un repère du plan dessinez la droite passant par $A(2{,}1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

Décrire une droite par un point et un vecteur directeur.

EXERCICE 16. Sans justification donnez les coordonnées de 3 vecteurs directeurs de la droite $\mathscr{D}$ représentée ci-dessous dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.



EXERCICE 17. Dans chacun des cas suivants, indiquez si le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

a) $A(-14;2)$, $B(5;-3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

b) $A(-7;3)$, $B(5;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$.

c) $A(5;2)$, $B(0;-3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$.

d) $A(4;-2)$, $B(3;-4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}4{,}5\\9\end{pmatrix}$.

EXERCICE 18. Dans chacun des cas suivants, calculez les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB).

a) $A(2;3)$ et $B(-1;2)$.
b) $A(-5;4)$ et $B(3;1)$.
c) $A(3;0)$ et $B(0;3)$.
d) $A(7;8)$ et $B(7;9)$.

Parallélisme.

Maintenant que nous avons une définition de la droite nous allons reformuler les propriétés des droites avec cette définition.

Définition 4. Nous dirons que deux droites sont *parallèles* si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Remarques.

1. Ainsi tout vecteur directeur de l'une des droites est un vecteur directeur de l'autre. Autrement dit deux droites parallèles ont la même direction.
2. La négation de cette proposition est aussi intéressante : (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
3. Nous utiliserons ce résultat pour étudier la position relative de droites du plan (coplanaires), *i.e.* pour dire si elles sont parallèles (éventuellement confondues voir corollaire ci-après) ou sécantes.

Remarques.

1. Lorsque les vecteurs sont des vecteurs du plan nous obtenons une équivalence entre colinéarité et parallélisme. Autrement dit les problèmes de parallélisme vont maintenant pouvoir être traité grâce aux vecteurs. Peu à peu nous voyons que les vecteurs peuvent remplacer les outils de géométrie que nous avions l'habitude d'utiliser en géométrie euclidienne classique (théorème de Thalès, angles alternes-internes, etc).

EXERCICE 19. Soient $A(-4;-3)$, $B(8;1)$, $C(4,4)$ et $D(-2;2)$ des points du plan.
Étudiez la position relative de (AB) et (CD).

EXERCICE 20. Déterminez la position relative des droites (AB) et (MN).

a) $A(1;2)$, $B(5;8)$, $M(0;-1)$ et $N(5;6)$.
b) $A(3;-10)$, $B(15;5)$, $M(1;1)$ et $N(17;21)$.

EXERCICE 21. On considère une droite d passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$. Soient $B(7;-5)$, $C(-4;6)$ et $D(3;-4)$.

1. Tracez la droite d puis placez B, C et D.
2. Le point B appartient-il à d ?
3. Les droites d et (CD) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 22. Dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan on considère les points $A(2,-2)$, $B(0;4)$, $C(-3;5)$ et $P(a;b)$.

1. Déterminez les coordonnées du point I milieu de $[AC]$.
2. Déterminez les coordonnées du point P vérifiant $\overrightarrow{OP} = -2\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}$.
3. Démontrez que les droites (OP) et (IB) sont parallèles.

EXERCICE 23. Dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan on considère les points $A(1,-1)$, $B(-2;0)$ et $C(-3;3)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Soit D le symétrique de B par rapport à A. Déterminez les coordonnées de D.
3. Soit le point $E(-4;6)$. Démontrez que B, C et E sont alignés et que C est le milieu de $[BE]$.
4. Démontrez que (AC) et (ED) sont parallèles.

EXERCICE 24.

Alignement de trois points.

Proposition 2. Soient A, B et C des points du plan. A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemples.

1. Montrons que $A(-1;2)$, $B(2;4)$ et $C(8;8)$ sont alignés.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 4-2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. De même $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$. $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$$\boxed{A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés.}}$$

EXERCICE 25. Soient $A(-2;3)$, $B(2;1)$ et $C(4;0)$ dans un repère du plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Démontrez que A, B et C sont alignés.

EXERCICE 26. Déterminez si les points A, B et C sont alignés.

a) $A(2;13)$, $B(-2;-7)$ et $C(11;58)$.
b) $A(9;20)$, $B(2;-1)$ et $C(25;71)$.

Il est possible de reformuler le précédent résultat : dire que trois points sont alignés, c'est dire que l'un d'entre eux appartient à la droite passant par les deux autres.

Proposition 3. Soient A, B et M des points du plan. M appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Remarques.

1. Ce résultat qui peut sembler anodin sera utiliser pour définir les droites du plan dans une prochaine leçon.

EXERCICE 27. Déterminez si le point M appartient à la droite (EF).

a) $E(5;-3)$, $F(-3;3)$ et $M(15;-9)$.
b) $E(0;-7)$, $F(1;0)$, $M(2;7)$.

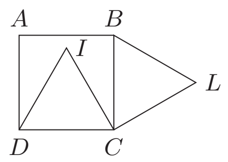
EXERCICE 28. Soit ABC un triangle. I est le milieu de $[AC]$. On considère les points D et E images respectives des points B et I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Que peut-on dire des points C, D et E ?

EXERCICE 29. Dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan on considère les points $A\left(-\frac{7}{2};2\right)$, $B(-2;5)$, $C\left(5;\frac{13}{2}\right)$ et $D\left(3,\frac{5}{2}\right)$.

1. (a) Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
   (b) Déduisez-en que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.
2. On définit le point I par l'égalité : $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ID}$.
   (a) Démontrez que les coordonnées de I sont $\left(-23,\frac{1}{2}\right)$.
   (b) Les points I, B et C sont-ils alignés ?
3. (a) J et K étant les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$, déterminez les coordonnées de J et K.
   (b) Démontrez alors que les points I, J et K sont alignés.

EXERCICE 30.

Soient $ABCD$ un carré, BCL et DIC des triangles équilatéraux tels que sur la figure ci-contre. Nous souhaitons établir l'alignement des points A, I et L. Pour cela considérons le repère orthonormé $(D;C;A)$.



1. Donnez sans justification les coordonnées de D, C, A et B.
2. Déterminez les coordonnées de I et L.
3. Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AL}$.
4. Démontrez l'alignement des points A, I et L.

EXERCICE 31. Soient $A(4;0)$, $B(0;7)$ et $C(-6;-5)$ des points.

1. Calculez les coordonnées du milieu P de $[AB]$.
2. Calculez les coordonnées des points S et T définis par $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $5\overrightarrow{CT} = 4\overrightarrow{CA}$.
3. Le point P est-il sur la droite (ST) ?

EXERCICE 32. Soient $M(7;3)$, $N(-3;1)$, $C(0;5)$, $D(5;6)$ et $E(3;9)$ des points du plan.

1. Montrez que le quadrilatère $MNCD$ est un trapèze.
2. Montrez que E est le point d'intersection de (NC) et (MD).
3. Soient J et K les milieux respectivement de $[NM]$ et $[CD]$. Calculez les coordonnées de J et K.
4. Montrez que E, J et K sont alignés.

EXERCICE 33. On considère les points $E(5;-1)$, $F(-1;4)$, $G(7;2)$ et $M(1;y)$ où y est un nombre réel.

a) Pour quelle valeur de y le point M appartient-il à (FG) ?
b) Pour quelles valeurs de y les droites (EF) et (GM) sont-elles parallèles ?

Perpendicularité et vecteurs directeurs. Produit scalaire.

La perpendicularité de deux droites nécessite d'introduire une nouvelle opération entre les vecteurs que vous verrez l'année prochaine appelée le *produit scalaire*. Donc patience. Pour les impatients, en exclusivité quasi mondiale voici la définition de cette nouvelle opération.

Définition 5. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On appelle *produit scalaire* l'opération qui aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ associe le nombre : $\vec{u} \cdot \vec{v} := x_u x_v + y_u y_v$.

Exemples.

1. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 2 \times 4$.

Proposition 4. $(AB) \perp (CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Remarques.

1. Nous avons donc une traduction vectorielle de la perpendicularité.
2. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux*.

Exemples.

1. Montrons que $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
   $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 7 + (-7) \times 3 = 0$.

   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2. $A(2;6)$, $B(-5;4)$, $M(-10;0)$ et $N(-6;-7)$.
   Montrons que (AB) et (MN) sont perpendiculaires.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5-2 \\ 4-6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$. De même : $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = -7 \times 4 + (-4) \times (-7) = 0$.

   $(AB) \parallel (MN)$.

EXERCICE 34. Déterminez si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$. c) $\vec{u}\begin{pmatrix}15\\-12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$.
d) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-\sqrt{3}\\\sqrt{2}-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+\sqrt{3}\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 35. Dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(-2;1)$, $B(1,-5)$, $C(4;4)$ et $D\left(\frac{17}{2},-5\right)$.

1. Démontrez que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
3. Soient I et J des points du plan tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{JD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$. Calculez les coordonnées de I et J.
4. Démontrez que les droites (AB), (IJ) et (CD) sont parallèles.

EXERCICE 36. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(2;2)$, $B(-2,-1)$ et $C(-5;3)$.

1. Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Démontrez que ABC est rectangle.
3. Calculez AB, AC et BC. Que pouvez-vous en déduire quant à la nature du triangle ABC ?
4. Soit le point $F(a,1)$. Déterminez a tel que A, B et F soient alignés.
5. Trouvez les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
6. Déterminez les coordonnées du point E appartenant à l'axe des abscisses et tel que A, B et E soient alignés.
7. Déterminez les coordonnées du point K tel que $\overrightarrow{CK} = 2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{AB}$.

Barycentres.

Exercices.

EXERCICE 37. Soient $A(3;4)$, $B(1;1)$, $C(6;-2)$ et $D(8;1)$ des points, I le milieu de $[BC]$, et E et F les points définis par : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

1. Calculez les coordonnées de I, E et F.
2. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont-ils colinéaires ?
   (b) Qu'en déduisez-vous concernant les droites (BE) et (IF) ?
3. Montrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
4. (a) Calculez la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   (b) $ABCD$ est -il un rectangle ?
5. Les points I, F et D sont-ils alignés ?

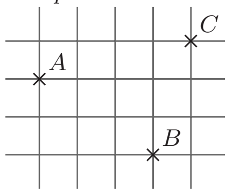
EXERCICE 38. Soit $ABCD$ un trapèze tel que $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Les points I et J sont les milieux de $[AC]$ et de $[BD]$. On se propose de montrer que $(AB) \parallel (IJ)$.

1. Complétez : $\overrightarrow{IJ} = \cdots + \overrightarrow{AB} + \ldots$ et $\overrightarrow{IJ} = \cdots + \overrightarrow{CD} + \ldots$.
2. Déduisez-en : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$.
3. Trouvez k tel que $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{AB}$ et concluez.

EXERCICE 39. *Démontrer la conservation de l'alignement par translation.* Soient A, B et C trois points alignés. On note A', B' et C' les images respectives de A, B et C par la translation d'un vecteur $\vec{u}$ non nul. Démontrez que A', B' et C' sont alignés.

EXERCICE 40. *Homothéties et vecteurs.*

1. *Cas particulier.* Soient trois points A, B et C tels que ci-dessous.



On considère les homothéties h_1 et h_2 de centre A et de rapports respectifs $k_1 = 2$ et $k_2 = -3$.

   (a) Reproduisez les points en respectant le quadrillage.
   (b) Construisez les images B_1 et C_1 respectivement des points B et C par l'homothétie h_1.
   (c) Exprimez sans justification $\overrightarrow{AB_1}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   (d) Exprimez sans justification $\overrightarrow{AC_1}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   (e) Reprenez les questions précédentes pour l'homothétie h_2.
   (f) Pour M un point quelconque on note M_1 et M_2 les images de M respectivement par h_1 et h_2. Exprimez sans justification $\overrightarrow{AM_1}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$ puis $\overrightarrow{AM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$.

2. *Cas général.* Soit h une homothétie de centre A et rapport $k \neq 0$. Pour tout point M du plan on note M' l'image de M par h. Exprimez $\overrightarrow{AM'}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$.

EXERCICE 41. On considère les points $A(1;1)$, $B(1;4)$, $C(-5{,}1)$ et $D(-3;-1)$. On note E et F les points tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

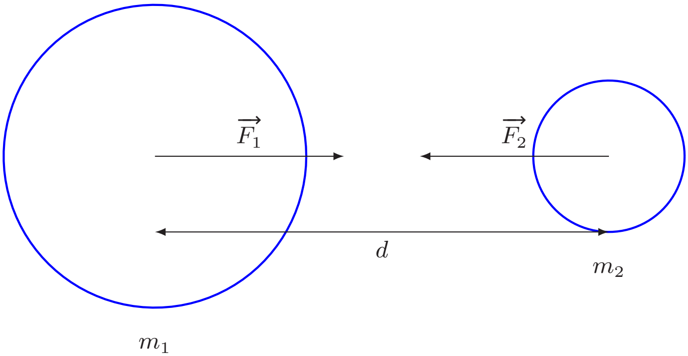
1. Construisez la figure.
2. Calculez les coordonnées de E et F en vérifiant sur la figure.
3. Démontrez que $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ puis déduisez-en la transformation géométrique qui transforme C en E.
4. Montrez que (AF) et (EC) sont parallèles.
5. Montrez que $ABCF$ est un parallélogramme.

EXERCICE 42. Soient, dans un repère du plan, $A(1;2)$, $B(5;2)$ et $C(5;10)$, D l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport 4, et E l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{4}$.

1. Exprimez $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculez les coordonnées des points D et E.
3. Montrez que $(EB) \parallel (CD)$.

EXERCICE 43. En physique les forces sont modélisées par des vecteurs. L'intensité d'une force, exprimée en newton, est la norme du vecteur force.

1. On sait par l'expérience (loi universelle de la gravitation), que deux objets, éloignés d'une distance d, exprimée en mètre, de masses m_1 et m_2, exprimées en kg, exercent l'un sur l'autre des force d'attraction de même intensité donnée par la formule $F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{d^2}$ où G est la constante de gravitation universelle égale à environ $6{,}6742 \times 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$. Ces deux forces sont représentées par des vecteurs, notés $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, de même direction mais de sens contraires.



Que pouvez-vous dire des deux vecteurs $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$?

2. On sait que la distance entre le centre de la Terre et le centre de la Lune est d'environ $3{,}84\times10^{8}$ m. Calculez l'intensité des forces d'attraction F entre la Terre dont la masse est $5{,}97\times10^{24}$ kg et la Lune dont la masse est $7{,}35\times10^{22}$ kg.
3. Le Soleil à une masse estimée à $1{,}99\times10^{30}$ kg et il est situé à environ $1{,}5\times10^{11}$ m de la Terre. Montrez que la force d'attraction du Soleil sur la Terre est environ 178 fois plus forte que celle exercée par la Lune sur la Terre.

EXERCICE 44. On considère un point $A(4;3)$. Tracez quatre droites d_1 à d_4 passant par A et admettant respectivement pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$.

EXERCICE 45. On donne trois points distincts A, B et C tels que $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Déterminez les abscisses de C dans les repères $(A,\overrightarrow{AB})$ et $(B,\overrightarrow{BA})$.

EXERCICE 46. Construisez, sur une droite $\mathscr{D}$ de repère $(O,\vec{u})$, les points R et S d'abscisses respectives $\frac{3}{2}$ et -2. Calculez l'abscisse du milieu I de $[RS]$ et celle du barycentre G des points pondérés $(R,-3)$ et $(S,5)$.

EXERCICE 47. Dans le plan affine $\mathscr{P}$ muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(-1,-3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,2)$. Placer les points B, C, D et E de paramètres respectifs 1, $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ et 3 dans le repère $(A,\vec{u})$ de $\mathscr{D}$ et calculez les coordonnées de ces points.

EXERCICE 48. Soit M le point du segment $[AB]$ de paramètre $\frac{1}{3}$ dans le repère $(A,\overrightarrow{AB})$. Démontrez qu'il existe deux réels α et β tels que :

(i) $\alpha\geqslant0$, $\beta\geqslant0$, $\alpha+\beta=1$.
(ii) M est le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β).

EXERCICE 49. Soit A et B deux points distincts. Démontrez que le barycentre des points pondérés $(A,3)$ et $(B,4)$ est un point du segment $[AB]$. En est-il de même du barycentre des points pondérés $(A,-2)$ et $(B,5)$?

EXERCICE 50. On considère un triangle ABC.

1. Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{BC}$, lorsque t décrit $\mathbb{R}$?
2. Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$, lorsque t décrit $\mathbb{R}$?
3. Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, lorsque t décrit $\mathbb{R}$? (Introduisez le point D tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ et choisir C comme origine.)

EXERCICE 51. Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}-\vec{j}+t(\vec{i}-\vec{j})$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$?

EXERCICE 52. Soit ABC un triangle non aplati. On définit D et E tels que $2\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, ainsi que I, milieu de $[DE]$. On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

1. Donnez les coordonnées des points A, B et C.
2. Calculez les coordonnées des points E et D et en déduire les coordonnées du point I.
3. Démontrez que (BC) et (ED) sont parallèles.
4. Déterminez les coordonnées du point G vérifiant $6\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
5. Démontrez que $GBIC$ est un parallélogramme.

EXERCICE 53. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-3;1)$, $B(1,-1)$, $C(3;3)$ et I milieu de $[AC]$.

1. Donnez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Soit $E(a,2)$. Déterminez a tel que A, B et E soient alignés.
3. Quelle est la nature du triangle ABC ?
4. (a) Déterminez les coordonnées du point D image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
   (b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
5. Déterminez les coordonnées du point J, symétrique de A par rapport à B.
6. Déterminez les coordonnées du point F appartenant à l'axe des abscisses tel que A, B et F soient alignés.
7. Déterminez les coordonnées du point G appartenant à l'axe des ordonnées tel que les droites (BG) et (AI) soient parallèles.

EXERCICE 54. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(-1;3)$, $B(3;1)$, $C(1;7)$ et I le milieu de $[BC]$.

1. Quelles sont les coordonnées du point I ? Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Déterminez les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Quelle est la nature du parallélogramme $ABDC$?
4. Déterminez les coordonnées du point E appartenant à l'axe des abscisses et tel que A, B et E soient alignés.
5. Déterminez les coordonnées du point F appartenant à l'axe des ordonnées et tel que (CF) et (IA) soient parallèles.
6. Déterminez les coordonnées du point K tel que : $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KB}$.
7. Quelles sont les coordonnées du point J, symétrique de A par rapport à B.

EXERCICE 55. Dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(2;0)$, $B(-1;1)$ et $C(-2;4)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Déterminez les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Déduisez-en la nature du parallélogramme $ABCD$.
4. Soit $E(6,-4)$. Démontrez que les points A, C et E sont alignés, puis que A est le milieu de $[CE]$.
5. Déterminez les coordonnées de F, symétrique de C par rapport à B.
6. Démontrez que (AB) et (FE) sont parallèles.
7. Déterminez les coordonnées du point G appartenant à l'axe des abscisses et tel que B, C et G soient alignés.

EXERCICE 56. Le plan étant muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(-2;5)$, $B(2,-1)$, $C(5;1)$, $D\left(-\frac{15}{4},-\frac{1}{2}\right)$ et I le milieu de $[AC]$.

1. Placez les points A, B, C, D et I dans un repère orthonormé.
2. Quelles sont les coordonnées du point I ?
3. Quelle est la nature du triangle ABC ?
4. Trouvez les coordonnées du point E tel que $ABCE$ soit un parallélogramme. Quelle est la nature du parallélogramme $ABCE$?
5. Démontrez que les droites (ID) et (BC) sont parallèles.
6. Déterminez les coordonnées du point F appartenant à l'axe des ordonnées et tel que A, B et F soient alignés.
7. Déterminez les coordonnées du point G tel que : $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{GB}$.
8. Déterminez les coordonnées du point H appartenant à l'axe des abscisses et tel que les droites (CH) et (AB) soient parallèles.
9. Quelles sont les coordonnées du point J, symétrique de C par rapport à A ?

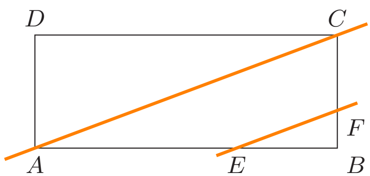
EXERCICE 57. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère les points $A(-1;3)$, $B(-3;1)$ et $C(-1;1)$.

1. Déterminez les coordonnées du point K tel que : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminez les coordonnées du point J tel que : $\overrightarrow{CJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
3. Déterminez les coordonnées du point L tel que : $\overrightarrow{AL} + 2\overrightarrow{CL} = \vec{0}$.
4. Démontrez que $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$.
5. Déterminez les coordonnées du point N tel que : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL}$.
6. Démontrez que les points C, N et B sont alignés.

EXERCICE 58. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A\left(\frac{3}{4},1\right)$, $B(-2;3)$, $C\left(-\frac{7}{4},4\right)$ et $D(1;2)$.

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Déterminez les coordonnées des points E et F tels que $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.
3. Déterminez les coordonnées des points G et H tels que $BAEG$ et $BAFH$ soient des parallélogrammes.
4. Démontrez que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DE}$.
5. Déduisez-en que C, G et H sont alignés.

EXERCICE 59. Soient $ABCD$ un rectangle. Le point E appartient au segment $[AB]$ tel que $AE = \frac{2}{3}AB$ et le point F appartient au segment $[BC]$ tel que $BF = \frac{1}{3}BC$.



1. *Méthode 1 : solution analytique.*
   (a) Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$, quelles sont les coordonnées des points A, B, C, D, E et F ?
   (b) Démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires. Que pouvez-vous en déduire ?
2. *Méthode 2 : solution vectorielle.* Démontrez que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Que pouvez-vous en déduire ?

3. *Méthode 3 : solution utilisant les configurations.* En utilisant la réciproque du théorème de Thalès démontrez que les droites (AC) et (EF) sont parallèles.

EXERCICE 60. On considère quatre points A, B, C et D distincts, vérifiant $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD}$. En remarquant que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$, démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Que pouvez-vous en déduire pour (AB) et (CD) ?

EXERCICE 61. Soient ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CB]$, D le symétrique du point B par rapport à A, E le point d'intersection des droites (JD) et (IC), F le point d'intersection des droites (AC) et (JD).

1. Démontrez l'existence d'un réel k tel que : $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CI}$.
2. Démontrez l'existence d'un réel λ tel que : $\overrightarrow{CF} = \lambda\overrightarrow{CA}$.
3. En se plaçant dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, déterminez les coordonnées des points A, B, C, D, I et J.
4. Déterminez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CI}$.
5. En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$ en fonction de k, puis les coordonnées du point E en fonction de k.
6. En utilisant le fait que les points J, E et D sont alignés, trouvez une équation satisfaite par k et déduisez-en la valeur de k.
7. Déterminez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CA}$.
8. Déduisez-en l'expression du vecteur $\overrightarrow{CF}$ en fonction de λ, puis les coordonnées du point F en fonction de λ.
9. En utilisant le fait que J, F et D sont alignés, déterminez la valeur de λ.

EXERCICE 62. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(8;3)$, $(3;5)$ et $(3;2)$. Déterminer y, ordonnée du point D de coordonnées $(-3;y)$ tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

Corrections.

Exercice 62.

a) Clairement en considérant les coordonnées des vecteurs nous remarquons une proportionnalité : $\vec{v} = -2\vec{u}$. Et donc

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

b) Montrons que $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u};\vec{v}) &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix} \\
&= \left(\sqrt{2}-1\right) \times \left(\sqrt{2}+1\right) - 1 \times 1 \\
&= \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 1 + (-1) \times \sqrt{2} + (-1) \times 1 - 1 \\
&= \sqrt{2}^2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 2 \\
&= 2 - 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

Exercice 62. Démontrons que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-(-10) \\ -2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$.

De même les coordonnées de $\overrightarrow{DB}$ sont $\begin{pmatrix} -30 \\ 18 \end{pmatrix}$.

Clairement $\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

Exercice 62.

a) $-2\vec{u} = \vec{v}$.
b) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.
c) $-3\vec{u} = \vec{v}$.
d) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.
e) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.
f) $\frac{5}{9} \times (-15) - \left(-\frac{5}{6}\right) \times 11 \neq 0$ donc ils ne sont pas colinéaires.
g) $-(\sqrt{5}+1)\vec{u} = \vec{v}$.

Exercice 62.

a) Clairement en considérant les coordonnées des vecteurs nous remarquons une proportionnalité : $\vec{v} = -2\vec{u}$. Et donc

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b) Montrons que $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u};\vec{v}) &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix} \\
&= \left(\sqrt{2}-1\right) \times \left(\sqrt{2}+1\right) - 1 \times 1 \\
&= \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 1 + (-1) \times \sqrt{2} + (-1) \times 1 - 1 \\
&= \sqrt{2}^2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 2 \\
&= 2 - 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

c) Déterminons si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u};\vec{v}) &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 3 \times 2 - 4 \times (-1) \\
&= 11 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

d) Déterminons l'ensemble des x tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u},\vec{v}) = 0 &\iff \begin{vmatrix}1 & x\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 0\\ &\iff 1\times 3 - 2\times x = 0\\ &\iff -2x+3=0\\ &\iff -2x+3-3 = 0-3\\ &\iff -2x=-3\\ &\iff \frac{-2x}{-2} = \frac{-3}{-2}\\ &\iff x = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x = \frac{3}{2}$.

Exercice 62.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\11\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}$, $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = -5\times 5-(-7)\times 11 \neq 0$ donc ils ne sont pas colinéaires.
b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ donc ils sont colinéaires.
c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$, $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
d) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1/4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$, $4\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
e) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11/5\\-7/6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}11/5\\0\end{pmatrix}$, $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \neq 0$ les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercice 62. $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}12\\-12\end{pmatrix}$.

Exercice 62. $\det(\vec{u};\vec{v}) = -101 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 62.

a) $\vec{u} = 1\cdot\vec{v}$ donc colinéaires.
b) $\det(\vec{u},\vec{v}) = -135$ donc non colinéaires.
c) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \frac{48}{8}$ donc non colinéaires.
d) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ donc colinéaires.
e) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ donc colinéaires.
f) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ donc colinéaires.

Exercice 62.

a) $-2\vec{u} = \vec{v}$.
b) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.
c) $-3\vec{u} = \vec{v}$.
d) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.
e) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.
f) Non colinéaires.
g) $\frac{-4}{\sqrt{5}-1}\vec{u} = \vec{v}$.

Exercice 62.

a) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0 \iff -3\times 2 - 5\times\mu = 0 \iff -\frac{6}{5} = \mu$.
b) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0 \iff 5\times\frac{1}{3} - \mu\times 2 = 0 \iff \frac{5}{6} = \mu$.

Exercice 62.

a) Le résultat est immédiat en remarquant que $y_v = 2xy_u$ donc nécessairement $x_v = 2x_u = 2\times 1 = 2$.
Déterminons x.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & x\\ 5 & 10\end{vmatrix} &= 0\\ 1\times 10 - 5\times x &= 0\\ 10-5x &= 0\end{aligned}$$

Nous reconnaissons une équation linéaire du premier degré que nous allons résoudre en travaillant par équivalences successives.

$$\begin{aligned}10-5x-10 &= 0-10\\ -5x &= -10\\ \frac{-5x}{-5} &= \frac{-10}{-5}\\ x &= 2\end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x = 2$.

b) De même

$$\begin{aligned}2\times(2x)-3\times(1+x) &= 0\\ 4x-3-3x &= 0\\ x &= 3\end{aligned}$$

Exercice 62. Démontrons que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont $\begin{pmatrix}x_C-x_A\\ y_C-y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-(-10)\\ -2-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\ -9\end{pmatrix}$.

De même $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}-30\\ 18\end{pmatrix}$.

Clairement $\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{AC}$.

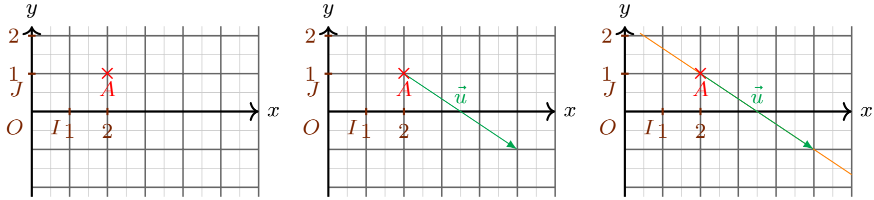
$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

Exercice 62.

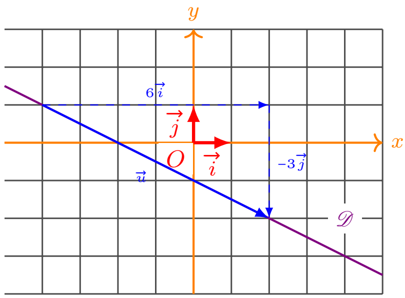
1. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}8\\ 12\end{pmatrix}$. $4\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ donc ils sont colinéaires.
2. $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}8\\ 13\end{pmatrix}$. $\det\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}\right) = 2\times 13 - 3\times 8 = 2 \neq 0$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercice 62. $\lambda\overrightarrow{FG} = \vec{u}$. Donc $\left\{\begin{array}{l}\lambda 2 = 5\\ \lambda(y_G-4) = -3\end{array}\right.$. D'où $\lambda = \frac{5}{2}$ puis $y_G = -3\times\frac{2}{5}+4 = \frac{14}{5}$.

Exercice 62.



Exercice 62. Il suffit de trouver les coordonnées d'un vecteur « porté » par la droite. Pour avoir davantage de vecteurs directeurs on peut lire d'autres coordonnées ou prendre les coordonnées du précédent vecteur multiplié par n'importe quel nombre non nul.



Les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 62.

a) Trivial : la réponse est non. Un vecteur nul ne peut être un vecteur directeur.

b) Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) &= \begin{vmatrix}5-(-7) & -6\\ 1-3 & 1\end{vmatrix}\\ &= 12\times 1-(-6)\times(-2)\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc :

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB).

c) Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) &= \begin{vmatrix}0-5 & 2\\ -3-2 & -2\end{vmatrix}\\ &= (-5)\times(-2)-(-5)\times 2\\ &= 20\\ &\neq 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc :

$\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (AB).

d) Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) &= \begin{vmatrix} 3-4 & 4{,}5 \\ -4-(-2) & 9 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\times 9-(-2)\times 4{,}5 \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc :

$$\boxed{\vec{u} \text{ est un vecteur directeur de } (AB).}$$

Exercice 62.

a) Puisque A et B sont distincts $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB). $2\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{AB}$ sont donc deux autres vecteurs directeurs de (AB).
$\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}$ sont les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB).

b) $\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}16\\-6\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}24\\-9\end{pmatrix}$ sont les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB).

c)

d) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ sont les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB).

Exercice 62. Étudier la position relative de deux droites du plan consiste à dire si elle sont parallèles ou sécantes (*i.e.* un unique pont d'intersection). Nous peaufinerons la réponse apportée à cette question dans la leçon sur les droites mais pour l'instant la réponse à cette question est soit « les droites sont parallèles » soit « les droites sont sécantes ».

Déterminons la position relative de (AB) et (CD).
$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8-(-4)\\1-(-3)\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix}$.

De même $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$

Clairement $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Autrement dit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
Ce qui équivaut encore à dire

$$\boxed{(AB) \text{ et } (CD) \text{ sont parallèles.}}$$

Exercice 62.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$. $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}\right) \neq 0$. Donc : $(AB) \nparallel (MN)$.
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}12\\15\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}16\\20\end{pmatrix}$. $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}\right) = 0$. Donc : $(AB) \parallel (MN)$.

Exercice 62.

1.
2. Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) &= \begin{vmatrix} 7-3 & -2 \\ -5-1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 4\times 3-(-6)\times(-2) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires donc B appartient à la droite passant ar A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

$$\boxed{B \in d.}$$

3. Déterminons si $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{u}\right) &= \begin{vmatrix} 3-(-4) & -2 \\ -4-6 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 7\times 3-(-10)\times(-2) \\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires donc :

$$\boxed{d \text{ et } (CD) \text{ ne sont pas parallèles.}}$$

Exercice 62.

1. $I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.
2. Déterminez les coordonnées du point P vérifiant $\left\{\begin{array}{l} x_P = -2\times 2+4\times 0-2\times(-3) \\ y_P = -2\times(-2)+4\times 4-2\times 5 \end{array}\right.$. $P(2;10)$.
3. $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}1/2\\5/2\end{pmatrix}$. $4\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{OP}$ donc $(IB)\parallel(OP)$.

Exercice 62.

1. $AB=\sqrt{10}$, $BC=\sqrt{10}$, $CA=4\sqrt{2}$ donc ABC isocèle ne B mais pas équilatéral. S'il est rectangle c'est donc nécessairement en B. Or $AB^2+BC^2\neq AC^2$ donc il n'est pas rectangle.
2. D symétrique de B par rapport à A ssi A milieu de $[BD]$ ssi $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}$. Or $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}1-x_D\\-1-y_D\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ donc $1-x_D=-3$ et $-1-y_D=1$. $D(4;-2)$.
3. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CE}$ et donc C est milieu de $[BE]$. On en déduit l'alignement souhaité.
4. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}$ donc $-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{ED}$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires et (AC) et (ED) sont parallèles.

Exercice 62.

Exercice 62. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$. $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ donc A, B et C sont alignés.

Exercice 62.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-20\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}13\\65\end{pmatrix}$. $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=-4\times 65-(-20)\times 13=0$ donc ils sont colinéaires et donc les points sont alignés.

b) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}16\\51\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-23\\-72\end{pmatrix}$. $\det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=16\times(-72)-51\times(-23)=21\neq 0$ les vecteurs ne sont pas colinéaires et les points ne sont donc pas alignés.

Exercice 62.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-20\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}13\\65\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}) &= \begin{vmatrix} \sqrt{2}-4 & 13 \\ -20 & 65 \end{vmatrix} \\ &= -4\times 65-13\times(-20) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et donc :

$$\boxed{A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés.}}$$

Exercice 62. Une démonstration plus classique avec le théorème de Thalès pourrait être plus brève.

$t_{\overrightarrow{AB}}(B) = D$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$.

$t_{\overrightarrow{AB}}(I) = E$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IE}$

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$ car I est le milieu de $[AC]$.

Ainsi $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$ donc E est le milieu de $[DC]$.

Exercice 62.

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$.
   (b) $-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc $(AB) \parallel (CD)$ et donc $ABCD$ est un trapèze (on pourrait détailler la justification du fait qu'il est non croisé).
2. (a) $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_I = \frac{3}{4}(x_D - x_I) \\ y_A - y_I = \frac{3}{4}(y_D - y_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} - x_I = \frac{3}{4}(3 - x_I) \\ 2 - y_I = \frac{3}{4}\left(\frac{5}{2} - y_I\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -23 \\ y_I = \frac{1}{2} \end{cases}$.
   (b) $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}21\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}28\\6\end{pmatrix}$. $\det\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}\right) = \begin{vmatrix}21 & 28\\9/2 & 6\end{vmatrix} = 21 \times 6 - 28 \times \frac{9}{2} = 0$ donc les points sont bien alignés.
3. (a) $J\left(-\frac{11}{4},\frac{7}{2}\right)$ et $K\left(4,\frac{9}{2}\right)$.
   (b) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}81/4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}27\\4\end{pmatrix}$. $\det\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}\right) = \begin{vmatrix}81/4 & 27\\3 & 4\end{vmatrix} = \frac{81}{4} \times 4 - 3 \times 27 = 0$ donc les points sont bien alignés.

Exercice 62.

1. $D(0,0)$, $C(1;0)$, $A(0;1)$ et $B(1;1)$.
2. $I\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $L\left(\frac{1}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.
4. $\det\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AL}\right) = \begin{vmatrix}1/2 & 1+\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2-1 & -1/2\end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2 = 0$ donc les points sont alignés.

Exercice 62.

1. $P\left(2;\frac{7}{2}\right)$.
2. $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_S - 0 = \frac{1}{3}(0-(-6)) \\ y_S - 7 = \frac{1}{3}(7-(-5)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_S = 2 \\ y_S = 11 \end{cases}$

   $5\overrightarrow{CT} = 4\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x_T-(-6)) = 4(-6-4) \\ 5(y_T-(-5)) = 4(0-(-5)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T = 14 \\ y_T = -1 \end{cases}$.
3. $\overrightarrow{PS}\begin{pmatrix}0\\\frac{15}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}12\\-12\end{pmatrix}$ les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points ne sont pas alignés. $P \notin (ST)$.

Exercice 62.

1. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-10\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CD}$ donc $MNCD$ est un trapèze non croisé dont les bases sont $[MN]$ et $[CD]$.
2. $\overrightarrow{ME}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MD}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MD}$ et donc $E \in (MD)$. $\overrightarrow{NE}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NC}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{NC}$ et donc $E \in (NC)$. $(NC) \cap (MD) = \{E\}$.
3. $J(2;2)$ et $K\left(\frac{5}{2},\frac{11}{2}\right)$.

4. $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}-1/2\\-7/2\end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{EK}$ et les poionts sont alignés.

Exercice 62.

a) $M\in(FG)\iff \det\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FG}\right)=0\iff \begin{vmatrix}1-(-1) & 7-(-1)\\ y-4 & 2-4\end{vmatrix}=0\iff 2\times(-2)-(y-4)\times 8=0\iff y=\frac{7}{2}$.

b) $(EF)\parallel(GM)\iff \det\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{GM}\right)=0\iff \begin{vmatrix}-6 & -6\\ 5 & y-2\end{vmatrix}=0\iff -6\times(y-2)-(-6)\times 5=0\iff y=7$.

Exercice 62.

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-1\times 12+4\times 3=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=2\times 3+1\times 5=11\neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.
c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=15\times(-4)+(-12)\times(-5)=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
d) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2-1^2=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 62.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times 6+(-6)\times 3=0$ donc ABC est rectangle en A.
2. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}9/2\\-9\end{pmatrix}$ donc $\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ et par conséquent $ABDC$ est trapèze dont les bases sont $[AB]$ et $[DC]$. D'après la question précédente ce trapèze est même rectangle.
3. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\iff \begin{cases}x_I-(-2)=\frac{1}{3}\times 6\\ y_I-1=\frac{1}{3}\times 3\end{cases}\iff I(0;2)$. $\overrightarrow{JD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}\iff \begin{cases}\frac{17}{2}-x_J=\frac{2}{3}\times\frac{15}{2}\\ -5-y_J=\frac{2}{3}\times 0\end{cases}\iff J\left(\frac{7}{2};-5\right)$.
4. Nous avons déjà démontré que $(AB)\parallel(CD)$. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}7/2\\-7\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 62.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ donc ABC est rectangle en B.
3. $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$, $AC=\sqrt{(-7)^2+1^2}=5\sqrt{2}$ et $BC=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$. ABC est donc isocèle-rectangle en B.
4. Soit le point $F(a{,}1)$. A, B et F sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF})=0\iff \begin{vmatrix}-4 & a-2\\ -3 & -1\end{vmatrix}=0\iff -4\times(-1)-(-3)\times(a-2)=0\iff 4+3a-6=0\iff a=\frac{2}{3}$.
5. $ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Or $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\iff\begin{cases}-4=-5-x_D\\ -3=3-y_D\end{cases}\iff D(-1;6)$. $ABCD$ est un parallélogramme ayant un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur donc c'est un carré.
6. A, B et E sont alignés ssi $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})=0$. Or $E(x_E{,}0)$ donc : $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})=0\iff \begin{vmatrix}-4 & x_E-2\\ -3 & -2\end{vmatrix}=0\iff -4\times(-2)-(-3)\times(x_E-2)=0\iff 8+3x_E-6=0\iff x_E=-\frac{2}{3}$.
7. $\overrightarrow{CK}=2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{AB}\iff\begin{cases}x_K-(-5)=2\times(-2-x_K)+(-4)\\ y_K-3=2\times(-1-y_K)+(-3)\end{cases}\iff K\left(-\frac{13}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

Exercice 62.

1. * Déterminons les coordonnées de I.
Puisque I est le milieu de $[BC]$: $x_I=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{1+6}{2}=\frac{7}{2}$. De même : $y_I=-\frac{1}{2}$.

$$\boxed{I\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right).}$$

* Déterminons les coordonnées de E.
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6-3 \\ -2-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.
D'où : $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\times 3 \\ \frac{1}{3}\times(-6) \end{pmatrix}$ *i.e.* $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
De même : $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - 3 \\ y_E - 4 \end{pmatrix}$.
De $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ nous déduisons donc $\begin{cases} x_E - 3 = 1 \\ y_E - 4 = -2 \end{cases}$
Ce qui équivaut successivement à : $\begin{cases} x_E - 3+3 = 1+3 \\ y_E - 4+4 = -2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 4 \\ y_E = 2 \end{cases}$.

$$\boxed{E(4;2).}$$

* De même qu'au point précédent
$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F - 6 = \frac{1}{3}(3-6) \\ y_F - (-2) = \frac{1}{3}(4-(-2)) \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 5 \\ y_F = 0 \end{cases}$.

$$\boxed{F(5;0).}$$

2. (a) Démontrons que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $\det\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{IF}\right) = \begin{vmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 3\times\frac{1}{2} - 1\times\frac{3}{2} = 0$.

$$\boxed{\overrightarrow{BE} \text{ et } \overrightarrow{IF} \text{ sont colinéaires.}}$$

(b) Nous déduisons de la question précédente que :

$$\boxed{(BE) \parallel (IF).}$$

3. Démontrons que $ABCD$ est un parallélogramme.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Par conséquent :

$$\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

4. (a) Calculons $||\overrightarrow{AC}||$.
La formule pour la distance euclidienne est la même que celle pour la norme du vecteur. Par contre comme le repère n'est pas orthonormé la norme ne correspond pas forcément à une longueur.

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{AC}|| &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(6-3)^2 + (-2-4)^2} \\ &= \sqrt{45} \\ &= \sqrt{3^2 \times 5} \\ &= \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$||\overrightarrow{AC}|| = 3\sqrt{5}.$$

(b) Nous ne pouvons pas répondre à cette question car le repère n'étant a priori pas orthonormé nous ne pouvons pas établir la présence d'angle droit ou d'égalité de longueur (diagonales).

Si nous supposons que le repère est orthonormé alors, comme $||\overrightarrow{BD}|| = 9$, nous pouvons affirmer que les diagonales du parallélogramme $ABCD$ ne sont pas de même longueur donc ce n'est pas un rectangle.

5. Démontrons que les points I, F et D sont alignés.

Ils sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-3\\ -1\end{pmatrix}$ donc $\det\left(\overrightarrow{IF};\overrightarrow{DF}\right) = \begin{vmatrix}\frac{3}{2} & -3\\ \frac{1}{2} & -1\end{vmatrix} = \frac{3}{2}\times(-1) - \frac{1}{2}\times(-3) = 0$. Donc $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires. Et par conséquent

$$I,\ F \text{ et } D \text{ sont alignés.}$$

Exercice 62.

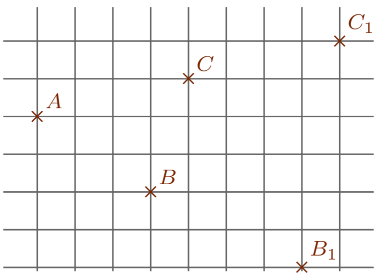
1. Complétez : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ}$.
2. $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{DJ}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$. Or I et J milieu respectif de $[AC]$ et $[BD]$ donc $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$. Enfin : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$.
3. $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Conclusion $(IJ) \parallel (AB)$.

Exercice 62. A, B et C sont alignés donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'} = -\vec{u}+\overrightarrow{AB}+\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. De même : $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC}$ et donc $\overrightarrow{B'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$. Les point A', B' et C' sont alignés.

Exercice 62.

1. (a)

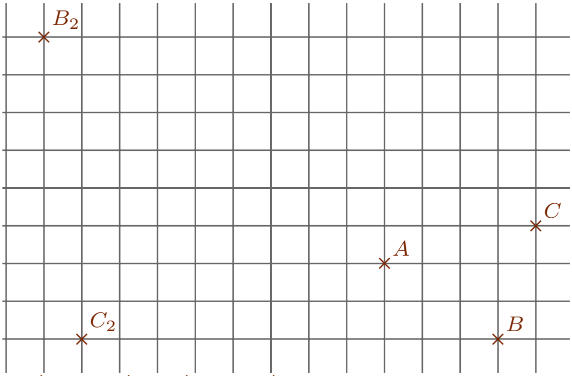
   (b)



   (c) $\overrightarrow{AB_1} = 2\overrightarrow{AB}$.

   (d) $\overrightarrow{AC_1} = 2\overrightarrow{AC}$.

   (e)



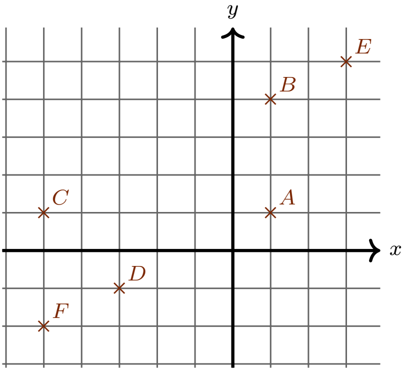
$\overrightarrow{AB_2} = -3\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AC_1} = -3\overrightarrow{AC}$.

(f) $\overrightarrow{AM_1} = 2\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM_2} = -3\overrightarrow{AM}$.

2. $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$.

Exercice 62.

1.



2. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et donc $E(3;5)$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ donc $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ et donc $F(-5;-2)$.
3. Avec les coordonnées : $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ donc E est l'image de C par l'homothétie de centre B et de rapport $-\frac{1}{3}$.
4. $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EC}$ donc (AF) et (EC) sont parallèles.
5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FC}$ donc $ABCF$ est un parallélogramme.

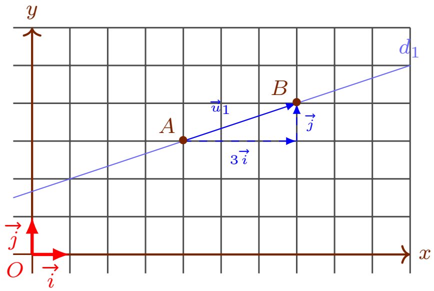
Exercice 62.

1. $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
2. $D(17;2)$ et $E(2;4)$.
3. C est l'image de E par l'homothétie de centre A et de rapport 4 donc $(EB) \parallel (CD)$.

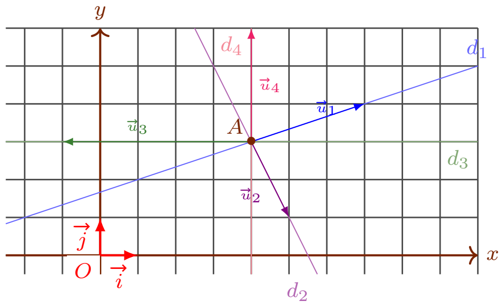
Exercice 62.

1. $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont opposés.
2. $F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{d^2} = 6{,}6742 \times 10^{-11} \times \frac{5{,}97\times10^{24}\times7{,}35\times10^{22}}{(3{,}84\times10^{8})^2} \approx 1{,}986 \times 10^{20}$ N.
3. $F_S = 6{,}6742 \times 10^{-11} \times \frac{5{,}97\times10^{24}\times1{,}99\times10^{30}}{(1{,}5\times10^{11})^2} \approx 3{,}524 \times 10^{22}$. $\frac{3{,}524\times10^{21}}{1{,}986\times10^{20}} \approx 1{,}77 \times 10^{2}$.

Exercice 62. L'idée principale est la suivante pour tracer une droite nous devons en connaître deux points. Nous connaissons déjà A il faut en trouver un autre. Le plus simple est de prendre le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. Une autre façon de dire les choses nous cherchons l'image, B, de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.



En procédant de même pour les autres vecteurs :



Exercice 62. $\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $C\left(-\frac{2}{3}\right)$ dans $\left(A,\overrightarrow{AB}\right)$. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $C\left(\frac{5}{3}\right)$ dans $\left(B,\overrightarrow{BA}\right)$.

Exercice 62.

$I\left(\frac{\frac{3}{2}+(-2)}{2}\right)$ donc $I\left(-\frac{1}{4}\right)$.

$-3\overrightarrow{GR} + 5\overrightarrow{GS} = \vec{u} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{GO} - 3\overrightarrow{OR} + 5\overrightarrow{GO} + 5\overrightarrow{OS} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\left(-3\overrightarrow{OR} + 5\overrightarrow{OS}\right)$ donc $G\left(-\frac{29}{4}\right)$.

Exercice 62. $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ donc $B(0;-1)$. $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\vec{u}$ donc $C\left(-\frac{5}{2};-6\right)$. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{u}$ donc $D\left(\frac{1}{2},-2\right)$. $\overrightarrow{AE} = 3\vec{u}$ donc $E(2;3)$.

Exercice 62. $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Exercice 62. $3\overrightarrow{AG} + 4\overrightarrow{BG} = \vec{0} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$ comme $\frac{4}{7} \in [0;1]$, $G \in [AB]$.

$-2\overrightarrow{AG} + 5\overrightarrow{BG} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = 5\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$ comme $\frac{5}{3} \in [0;1]$, $G \notin [AB]$.

Exercice 62.

1. La droite parallèle à (BC) passant par A.
2. La médiane de ABC issue de A.
3. La parallèle à (AB) passant par C.

Exercice 62. La droite passant par $A(2;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 62.

1. $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$.
2. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2x_E-2\times1\\2y_E-2\times0\end{pmatrix}$ donc $E\left(1;\frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2x_D-2\times0\\2y_D-2\times1\end{pmatrix}$ donc $D\left(\frac{1}{2},1\right)$. $I\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$.
3. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{ED}$ donc ils sont colinéaires et (BC) et (ED) sont parallèles.
4. Si G vérifie $6\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ alors $4x_G=1$ et $4y_G=1$ donc $G\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.
5. $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}3/4\\-1/4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}3/4\\-1/4\end{pmatrix}$ donc $GBIC$ est un parallélogramme.

Exercice 62.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.
2. A, B et E sont alignés ssi $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}4 & a+3\\-2 & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow a=-5$.
3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ donc ABC est rectangle en B mais pas isocèle.
4. (a) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_D-(-3)\\y_D-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow D(-1;5)$.
   (b) $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme. Comme de plus $\widehat{ABC}$ est droit, $ABCD$ est un rectangle.
5. J symétrique de A par rapport à B ssi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BJ} \Leftrightarrow J(5;-3)$.
6. A, B et F sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires ssi $\begin{vmatrix}4 & x_F-(-3)\\-2 & 0-1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x_F=-5$.
7. $I(0;2)$. (BG) et (AI) sont parallèles ssi $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires. $\begin{vmatrix}0-1 & 3\\y_G-(-1) & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow G\left(0;-\frac{4}{3}\right)$.

Exercice 62.

1. $I(2;4)$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$.
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc ABC est rectangle en A. De plus $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{AC}\|$ donc ABC est isocèle rectangle en A.
3. $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ donc $D(5;5)$. $ABDC$ est donc un carré.
4. $4\times(-1)-(-2)\times(x_E-(-1))=0 \Leftrightarrow x_E=1$.
5. $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}-1\\y_F-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$. $2+3(y_F-7)=0 \Leftrightarrow y_F=\frac{19}{3}$.
6. $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OK}=3\overrightarrow{KO}+3\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$ donc $K\left(\frac{1}{2},1\right)$.
7. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AB}$ donc $J(7;-1)$.

Exercice 62.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$. $AB=BC$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ donc ABC est isocèle rectangle en B.
2. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}$ donc $D(1;3)$.
3. $ABCD$ est donc un carré.
4. $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AE}$ donc les points A, C et E sont alignés. De $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EA}$ on déduite que A est le milieu de $[CE]$.
5. $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BF}$ donc $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{OB}$ d'où $F(0;-2)$.
6. $\overrightarrow{FE}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ donc $-2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FE}$et donc (AB) et (FE) sont parallèles.

7. $\begin{vmatrix} -1 & x_G-(-1) \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1-3(x_G+1)=0 \Leftrightarrow x_G = -frac23$. Déterminez les coordonnées du point G appartenant à l'axe des abscisses et tel que B, C et G soient alignés.

Exercice 62.

1.
2. $I\left(\frac{3}{2},3\right)$.
3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ donc ABC est rectangle en B (mais pas isocèle).
4. $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}5-x_E\\1-y_E\end{pmatrix}$ donc $E(1;7)$.
5. $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}-21/4\\-7/2\end{pmatrix}$, $-\frac{4}{7}\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{BC}$ donc les droites (ID) et (BC) sont parallèles.
6. $\det\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0-(-2) & 4 \\ y_F-5 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y_F = 8$.
7. $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GO}+2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{GO}-\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}$ donc $G(19;-3)$.
8. $\det\left(\overrightarrow{CH},\overrightarrow{AB}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_H-5 & 4 \\ 0-1 & -6 \end{vmatrix} = 0$ $H\left(\frac{17}{3};0\right)$.
9. $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CA}$ donc $J(-9;9)$.

Exercice 62.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}$ donc $K\left(-\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$.
2. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{CJ}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OJ}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OC}$ donc $J\left(-\frac{7}{3};1\right)$.
3. $\overrightarrow{AL}+2\overrightarrow{CL}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}$ donc $L\left(-1;\frac{5}{3}\right)$.
4. $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}-4/3\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}2\\2/3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}-2/3\\4/3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$.
5. $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AL} \Leftrightarrow \overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AL}$. $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}0\\-4/3\end{pmatrix}$ donc $N\left(-\frac{5}{3},1\right)$.
6. $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}4/3\\0\end{pmatrix}$ donc $\frac{3}{2}\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}$ donc les points C, N et B sont alignés.

Exercice 62.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-11/4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-11/4\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et donc $ABCD$ est un parallélogramme.
2. $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{ED}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OE}$ donc $E\left(0;\frac{7}{3}\right)$. $\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OF}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{OD}$ or $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}-1/4\\-1\end{pmatrix}$ donc $F\left(\frac{7}{4};\frac{7}{4}\right)$.
3. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EG}$ donc $G\left(-\frac{11}{4},\frac{13}{3}\right)$. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FH}$ donc $H\left(-1,\frac{15}{4}\right)$.
4. $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}3/4\\-1/4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}-1\\1/3\end{pmatrix}=\overrightarrow{DE}$.
5.

Exercice 62.

1. (a) $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $E\left(\frac{2}{3},0\right)$ et $F\left(1;\frac{1}{3}\right)$.
   (b) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EF}$ et donc $(AC)\parallel(EF)$.
2. $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
3. Il y a une configuration de Thalès et $\frac{BF}{BC}=\frac{1}{3}=\frac{EB}{BA}$ donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AC) et (EF) sont parallèles.

Exercice 62. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BD}$ on déduit : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$ et donc $2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs sont colinéaires et les droites parallèles.

Exercice 62.

1. E est le point d'intersection des droites (JD) et (IC) donc $E \in (CI)$ donc il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CI}$.
2. F le point d'intersection des droites (AC) et (JD) donc $F \in (CA)$ donc il existe un réel λ tel que : $\overrightarrow{CF} = \lambda\overrightarrow{CA}$.
3. $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, $D(-1;0)$, $I\left(\frac{1}{2},0\right)$ et $J\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
4. $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}1/2\\-1\end{pmatrix}$.
5. $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}k/2\\-k\end{pmatrix}$. $E\left(\frac{k}{2},-k+1\right)$.
6. $\det\left(\overrightarrow{JE},\overrightarrow{JD}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\frac{k}{2}-\frac{1}{2} & -1-\frac{1}{2}\\ -k+1-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}k+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}k+\frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{4}{7}$.
7. $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.
8. $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-\lambda\end{pmatrix}$. $F\,(0;-\lambda+1)$.
9. $\det\left(\overrightarrow{JF},\overrightarrow{JD}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ -\lambda+1-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}-\left(-\lambda+\frac{1}{2}\right)\frac{-3}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$.

Exercice 62. $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-5 & -6\\ 2 & y-2\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{22}{5}$.